PENGARUH VARIASI *STEP-LENGTH* INTEGRASI PENDULUM NONLINEAR

Hansi Effendi
Dosen Jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Negeri Padang

ABSTRACT

This paper is to investigate the effect of varying the integration step-length, T, of non-linear pendulum. The non-linear model is derived from a simple forced pendulum with point mass m and rod length l. The model is solved iteratively. The tricky part of this equation is to predict the next output in order to find the next output. The best prediction for the next output will be the current output. At every loop, the answer provided by the equation is used as the predicted output for the next loop. This step is repeated until the predicted output and the actual output is equal to each other. It is surprisingly that, it only takes a few loops to produce the correct output if the time step is small enough. With small time step, the next output will be close to the current output. Hence, it is reasonable to use the current output as the expected next output providing the time step is very small. It is obvious that the number of step to produce a correct output and the error of the numerical integration increase rapidly with increasing time step size.

Keywords: Nonlinear pendulum, step-length, iterative, numerical integration

1. PENDAHULUAN

Pendulum adalah model paling sederhana untuk mendeskripsikan konsep gerak periodik. Gerak periodik adalah pergerakan berulang suatu sistem pada interval waktu tertentu. Pergerakan suatu pendulum di bentuk oleh massa, panjang kawat penghubung antara massa dan suatu titik, gravitasi, dan sudut θ_0 antara garis vertical dengan tempat massa memulai pergerakannya.

Tujuan tulisan ini yaitu untuk melihat bagaimana pengaruh ukuran waktu *step (step-length)* pada suatu model pendulum terhadap pergerakan periodiknya. Model yang ingin dilihat pada tulisan ini yaitu model pendulum non linear. Model ini diturunkan dari model sederhana yang telah ada.

Model nantinya akan diselesaikan dengan proses iterasi. Pada proses ini nantinya akan lakukan perkiraan nilai keluaran selanjutnya yang dipergunakan juga nantinya untuk mencari nilai keluaran berikutnya lagi. Perkiraan terbaik untuk keluaran selanjutnya akan menjadi keluaran sekarang. Pada setiap *loop*, jawaban yang didapat dari persamaan akan digunakan sebagai keluaran perkiraan untuk *loop* selanjutnya. Langkah tersebut akan terus dilakukan sampai keluaran yang ada dengan keluaran sebenarnya sama.

Salah satu hal penting yang perlu diperhatikan dalam pemodelan nantinya, yang juga merupakan tujuan utama dari tulisan ini, yaitu melihat pengaruh besar *step-length* yang digunakan dalam proses iterasi/ simulasi.

2. METODOLOGI

Pada tulisan ini ada beberapa tahap yang akan dilakukan untuk melihat pengaruh variasi *step-length* integrasi terhadap pergerakan pendulum nonlinear:

1. Studi literatur mengenai model pendulum sederhana,
2. Mengubah model sederhana menjadi model nonlinear,
3. Mendapatkan respon waktu untuk model pendulum nonlinear dengan menggunakan prosedur integrasi numerik sederhana,
4. Membuat simulasi gerak pendulum nonlinear dengan software simulasi, dan
5. Menyelidiki pengaruh variasi *step-length* (T) pada proses integrasi terhadap gerak pendulum nonlinear.

Sebuah model pendulum sederhana dengan massa *m*, panjang *l*, dan koefisien friksi *k* diberikan seperti persamaan di bawah ini:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{l}{ml^2}u$$

$$y = x_1$$

di mana $x_1 = \theta$ dan $x_2 = \dot{\theta}$, dan masukan *u* adalah torka.

Model pendulum dalam bentuk:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \ \ldots(1)$$

yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -{}^{g}\!/_{l}\sin x_1 - {}^{k}\!/_{m}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{1}\!/_{ml^2} \end{bmatrix} u$$

di mana:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix};\ f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -{}^{g}\!/_{l}\sin x_1 - {}^{k}\!/_{m}x_2 \end{bmatrix}, \text{dan}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{1}\!/_{ml^2} \end{bmatrix}$$

Menggunakan prosedur integrasi numerik sederhana, didapat respon waktu dari sistem nonlinear ini, yaitu untuk kasus:

$$u = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.02 & 0 \le t < 0.1 \\ 0 & t \ge 0.1 \end{cases} \text{ dan } x_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} & -0.1 \end{bmatrix}^T$$

- **Untuk $t < 0$ dan $t \ge 0.1$, u = 0, sehingga persamaan (1) menjadi:**

  $\overset{\bullet}{x} = f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{bmatrix}$, atau jika dipisahkan dengan x, persamaan akan menjadi:

  $$\overset{\bullet}{x} = f(x) =$$
  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{g}{l}\sin x_1\right)/x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ldots(2)$$

- **Untuk $0 \le t < 0.1$, u = 0.02. Persamaan (1) menjadi:**

  $\overset{\bullet}{x} = f(x) + g(x)u$, atau karena *g(x)* tidak memiliki variabel x, persamaan (1) dapat ditulis sebagai: $\overset{\bullet}{x} = f(x) + gu$.

  Sehingga,

$$\overset{\bullet}{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{g}{l}\sin x_1\right)/x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \ldots(3)$$

Untuk sistem nonlinear berlaku:

$$\overset{\bullet}{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

Dan dengan menggunakan sebuah pendekataan sederhana yang dikenal dengan "*implicit Euler*":

$$x(t_0 + T) \cong x(t_0) + \frac{1}{2}T(\overset{\bullet}{x}(t_0 + T) + \overset{\bullet}{x}(t_0))$$

Kita dapatkan persamaan yang dapat digunakan untuk mendapatkan respon waktu untuk model pendulum nonlinear:

$$x(t_0 + T) \cong x(t_0) + \frac{1}{2}T(f(x(t_0 + T), u(t_0 + T)) + f(x(t_0), u(t_0))) \ldots(4)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

- **Untuk $t < 0$ and $t \ge 0.1$, u = 0:**

$$\overset{\bullet}{x} = f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{g}{l}\sin x_1\right)/x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ldots(5)$$

Dengan mengaplikasikan nilai-nilai: *m* = 0.1 *kg*, *l* = 1 *m*, *k* = 0.1, *g* = 9.81 *m/s2*, Persamaan (5) menjadi:

$$\overset{\bullet}{x} = f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-9.81\sin x_1)/x_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

karena u = 0, persamaan (4) menjadi:

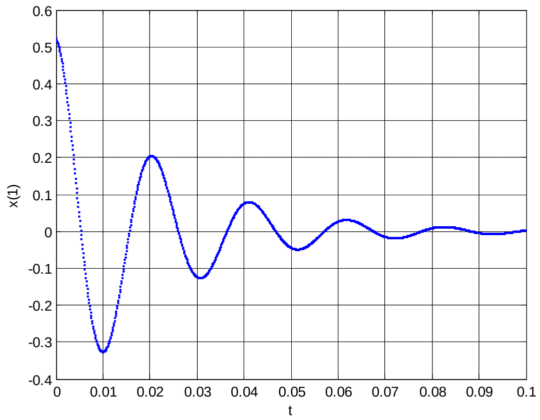
$$x(t_0 + T) \cong x(t_0) + \frac{1}{2}T(f(x(t_0 + T)) + f(x(t_0)))$$

Dengan mensubstitusikan *f(x)* ke dalam persamaan:

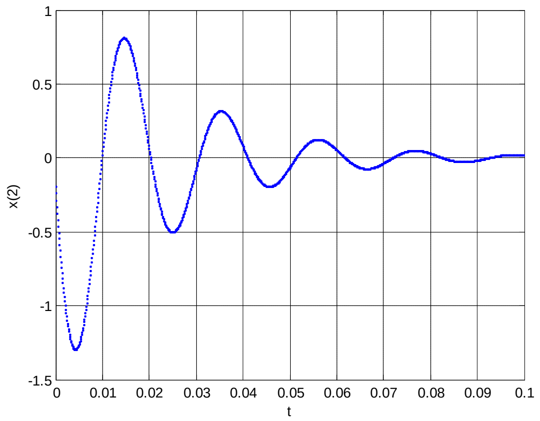
$$x(t_0 + T) \cong x(t_0) + \frac{1}{2}T(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-9.81\sin x_1)/x_1 & -1 \end{bmatrix}x(t_0 + T)$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-9.81\sin x_1)/x_1 & -1 \end{bmatrix}x(t_0))$$

Untuk iterasi pertama, dengan menggunakan kondisi awal $x_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} & -0.1 \end{bmatrix}^T = x(t_0)$, T = 0.01, dan dengan mempertimbangkan $x(t_0 + T) = x(t_0)$, kita dapatkan $x(t_0 + T) = x_1 = x_{new} = \begin{bmatrix} 0.5226 \\ -0.148 \end{bmatrix}$.

Setelah itu untuk iterasi kedua, gantikan x_0 dengan x_{new} dan akan didaptkan nilai baru untuk x. Gambar 1 dan gambar 2 memperlihatkan hasil x(1) dan x(2) masing-masing untuk t antara 0 dan 0.1. dengan *step response* 0.01.



Gambar-1Respon waktu x(1) untuk t = 0.01



Gambar-2 Respon waktu x(2) untuk t=0.01

- **Untuk $0 \le t < 0.1$, u = 0.02:**

$$\dot{x} = f(x) + gu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{g}{l}\sin x_1\right)/x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u$$

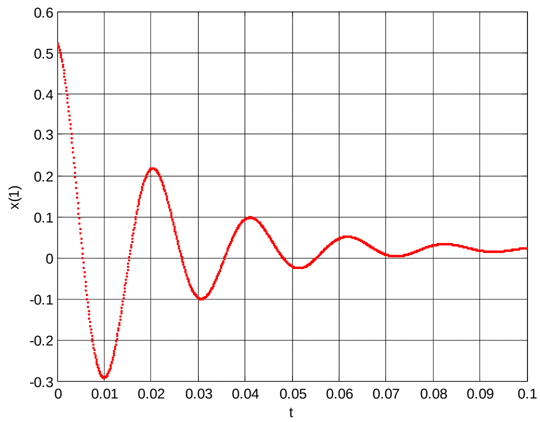
Dengan mensubsitusikan persamaan di atas ke persamaan (4) di dapat:

$$x(t_0+T) \cong x(t_0) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{g}{l}\sin x_1\right)/x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} x(t_0+T)\right.$$

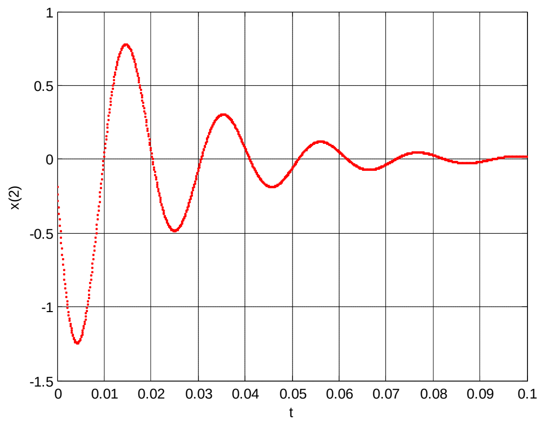
$$\left. + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u + \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{g}{l}\sin x_1\right)/x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} x(t_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u\right)\right)$$

Sama dengan perhitungan untuk $t < 0$ and $t \geq 0.1$, untuk iterasi pertama, menggunakan kondisi awal $x_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} & -0.1 \end{bmatrix}^T = x(t_0)$, T = 0.01, dan dengan mempertimbangkan $x(t_0+T) = x(t_0)$, didapatkan $x(t_0+T) = x_1 = x_{new} = \begin{bmatrix} 0.5226 \\ -0.146 \end{bmatrix}$.

Hasil untuk x(1) dan x(2) unttuk nilai t antara 0 and 0.1 untuk T = 0.01 diperlihatkan oleh gambar 3 dan gambar 4.

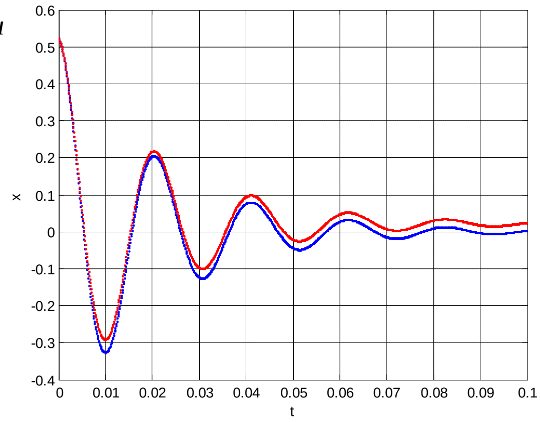


Gambar-3 Respon waktu x(1) untuk t=0.01



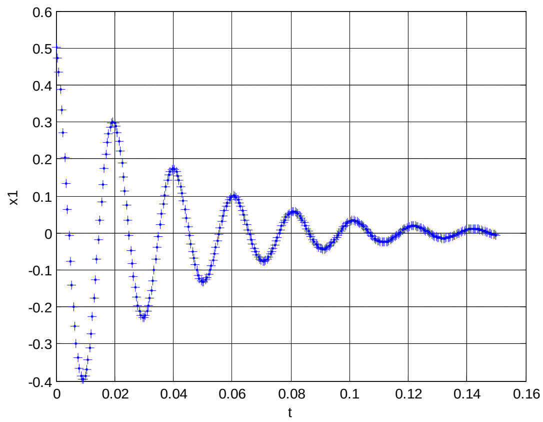
Gambar-4 Respon waktu x(2) untuk t = 0.01

Gambar 5 menunjukkan perbedaan antara gambar 1 dan gambar 3. Perbedaan muncul akibat input u sebesar 0.02.

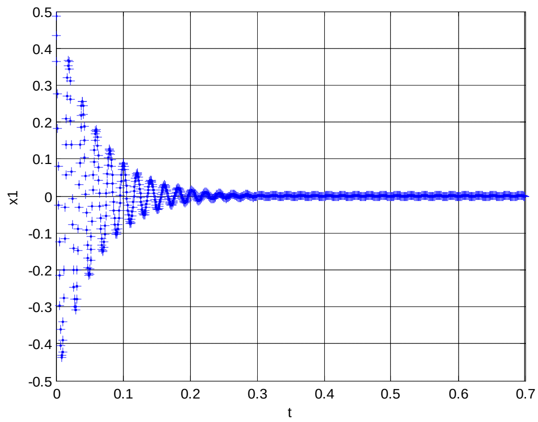


Gambar-5 Perbedaan antara gambar 1 dan 3

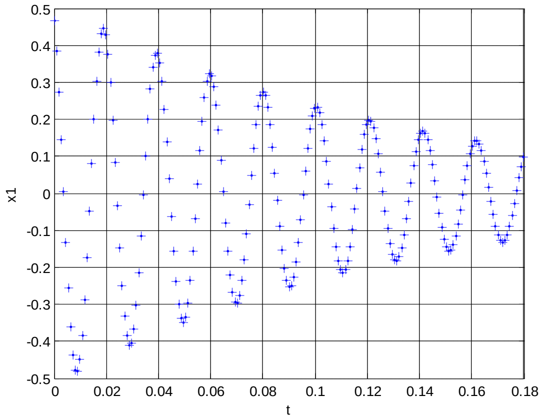
Jika kita lihat efek variasi dari integrasi *step-length*, T untuk sistem ini, maka hasilnya dapat dilihat pada gambar 6, 7, 8, 9, dan 10.



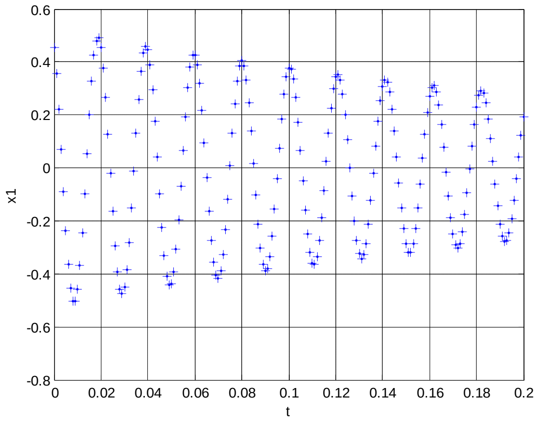
Gambar-6



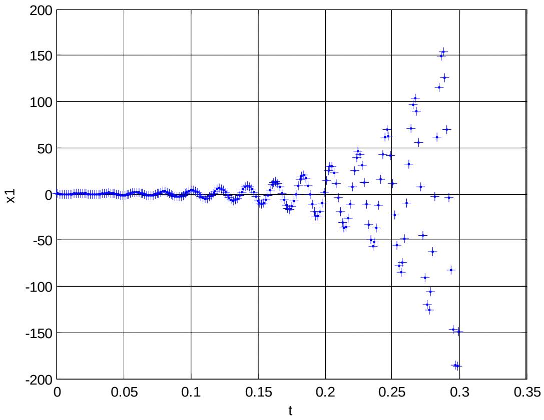
Gambar-7



Gambar-8



Gambar-9



Gambar-10

Untuk kasus serupa, terlihat bahwa hanya dibutuhkan beberapa *loop* untuk menghasilkan keluaran yang benar jika waktu *step* cukup kecil. Dengan waktu *step* yang kecil, keluaran selanjutnya akan cukup dekat dengan keluaran sebenarnya. Sehingga cukup masuk akal juga jika menggunakan keluaran terbaru sebagai keluaran yang diharapkan selanjutnya dengan memberikan waktu *step* yang sangat kecil. Seperti terlihat pada tabel 1, semakin besar waktu *step*, maka jumlah langkah yang dibutuhkan untuk mendapatkan hasil keluaran yang sesuai dengan keluaran yang diinginkan menjadi semakin besar juga. Dari segi error yang terjadi untuk waktu *step* yang berbeda juga tampak bahwa error dari integrasi numerik yang terjadi semakin besar dengan semakin besarnya ukuran waktu *step*. Hal ini terlihat pada tabel 2. Jadi pemilihan waktu *step* dan jumlah *step* yang sesuai dengan aplikasi yang diinginkan harus dilakukan secara hati-hati.

Tabel-1

Waktu Step	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Jumlah step	2	4	7	8	14	20	35

Tabel-2

Waktu Step	**Keluaran**				**Error (%)**	
	Setelah 1 *loop*		**Akhir**			
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0.01	0.5226	-0.146	0.5224	-0.1457	0.038	0.206
0.05	0.5186	-0.33	0.513	-0.3222	1.09	2.42
0.1	0.5136	-0.58	0.4914	-0.544	4.52	6.62
0.2	0.5036	-1.06	0.4242	-0.894	18.72	18.59
0.3	0.4936	-1.54	0.3381	-1.137	45.99	35.44
0.4	0.4836	-2.02	0.2417	-1.2828	100.08	57.47
0.5	0.4736	-2.5	0.1604	-1.3529	195.26	84.79

4. KESIMPULAN

1) Model pendulum nonlinear yang dimodelkan pada tulisan ini diturunkan dari model pendulum sederhana yang telah ada. Penyelesaian model dilakukan untuk kasus:
$$u = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.02 & 0 \le t < 0.1 \\ 0 & t \ge 0.1 \end{cases} \text{ dan } x_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} & -0.1 \end{bmatrix}^T$$
dengan: *m* = 0.1 *kg*, *l* = 1 *m*, *k* = 0.1, *g* = 9.81 *m/s2*
2) Dari tulisan sangat jelas terlihat bahwa jumlah *step* untuk menghasilkan keluaran yang benar dan persentase kesalahan integrasi numerik akan bertambah seiring dengan bertambahnya ukuran waktu *step*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Crusca, F, (2004). Modern Control System, *Laboratory Notes*. Monash University, Australia.
[2] H. k. Khalil, (1996). Nonlinear systems, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.