ANALISIS KEKONVERGENAN DERET FOURIER

TESIS

Oleh:

ERNI SUHARTI
06215029

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Analisis Kekonvergenan Deret Fourier

Oleh : Erni Suharti

(Dibawah bimbingan Muhafzan, Ph.D dan Haripamyu, M.Si)

RINGKASAN

Suatu fungsi $f(x)$ yang periodik dengan periode 2π dan kontinu bagian demi bagian atau $PC(2\pi)$ dapat diuraikan ke dalam deret Fourier dan didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dengan $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \quad dx$ dan $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \quad dx$. Tujuan dari kajian ini adalah untuk mengetahui jika diberikan $f \in PC(2\pi)$

(1). Apakah syarat yang harus dipenuhi oleh deret Fourier untuk f sedemikian sehingga ia konvergen titik demi titik

(2). Apa syarat yang harus dipenuhi oleh deret Fourier untuk f sedemikian sehingga ia konvergen seragam ke f

(3). Bagaimana kekonvergenan $\|f - S_n(f)\|_2$.

Untuk mencapai tujuan ini, beberapa kajian yang berkaitan dengan deret Fourier di lakukan, seperti kajian tentang fungsi kontinu bagian demi bagian.

Dari hasil kajian diperoleh kesimpulan bahwa (1). Jika $f \in PC(2\pi)$ dan f mempunyai turunan kiri dan turunan kanan di c, maka deret Fourier untuk f konvergen ke $\frac{1}{2}\{f(c-) + f(c+)\}$ pada titik c, (2). Jika f fungsi kontinu pada

$\left[-\pi,\pi\right]$ dan $f' \in PC(2\pi)$ maka deret Fourier untuk konvergen seragam ke f, (3). Terakhir jika $f \in PC(2\pi)$ dan $(S_n(f))$ merupakan barisan jumlah parsial dari deret Fourier untuk f maka, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - S_n(f)\|_2 = 0$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Barisan dan deret merupakan bagian yang sangat penting dalam matematika. Suatu barisan bilangan riil adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke bilangan riil. Biasanya barisan $x_1, x_2, x_3, \dots$ dinotasikan dengan (x_n). Selanjutnya deret didefinisikan berdasarkan barisan sebagai berikut.

Misalkan $X := (x_n)$ adalah barisan di $\Re$, maka deret tak hingga yang dihasilkan oleh X adalah barisan $S := (s_k)$ yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned}
&s_1 := x_1 \\
&s_2 := s_1 + x_2 \qquad (= x_1 + x_2), \\
&\vdots \\
&s_k := s_{k-1} + x_k \qquad (= x_1 + x_2 + \dots + x_k), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jika S konvergen maka lim S merupakan jumlah dari deret tak hingga. Elemen-elemen x_n disebut suku-suku dari deret tak hingga dan elemen s_k disebut jumlah parsial dari deret tak hingga (Bartle,1991). Selanjutnya suatu deret ditulis dengan lambang

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Salah satu deret yang cukup terkenal adalah deret Fourier. Deret Fourier muncul ketika merepresentasikan suatu fungsi periodik tertentu dengan suatu deret trigonometrik. Deret Fourier untuk $f(x)$ di definisikan sebagai deret trigonometrik

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1.1}$$

dengan koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ditentukan sebagai berikut:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \; dx.$$

Dalam (Bartle,1976) disebutkan bahwa keterkaitan deret Fourier (1.1.1) dengan fungsi $f(x)$, ditunjukkan dengan menulis sebagai berikut:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Bagian terpenting dari deret adalah masalah kekonvergenannya. Hal ini juga berlaku untuk deret Fourier. Syarat konvergen (seragam) ini sangat diperlukan dalam melakukan diferensial dan integral deret Fourier. Jika deret Fourier konvergen seragam pada suatu interval maka deret tersebut dapat didiferensialkan dan diintegralkan suku demi suku pada interval tersebut (Spiegel,1986). Ada beberapa jenis kekonvergenan yaitu kekonvergenan titik demi titik *(pointwise convergence)*, kekonvergenan seragam (*uniform convergence*), dan norm konvergensi (*norm convergence*).

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian dalam bagian pendahuluan maka dalam penelitian ini akan di analisis beberapa jenis kekonvergenan deret Fourier fungsi periodik dengan periode 2π dan kontinu bagian demi bagian yaitu:

BAB V
KESIMPULAN

Berdasarkan hasil kajian yang telah dilakukan, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika $f \in PC(2\pi)$ dan f mempunyai turunan kiri dan turunan kanan di c, maka deret Fourier untuk f konvergen ke $\frac{1}{2}\{f(c-)+f(c+)\}$.
2. Jika f kontinu dengan periode 2π dan $f' \in PC(2\pi)$ maka deret Fourier untuk f konvergen seragam ke f.
3. Jika $f \in PC(2\pi)$ dan $(S_n(f))$ merupakan jumlah parsial dari deret Fourier maka $\lim_{n\to\infty}\|f - S_n(f)\|_2 = 0$

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. 1976. The Elements of Real Analysis. Second Edition. John Wiley & Sons. NewYork.

--------, 1991. Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons. New York.

Brown, J.W. 1993. Fourier Series and Boundary Value Problems. Fifth Edition. Mc Graw-Hill.Inc. Singapore.

Gupta, SL. 1980. Fundamental Real Analysis. Vikas Publishing House. New Delhi.

Hutahaean, E. 1994. Seri Matematika Fungsi Riil. ITB. Bandung.

Kreyszig, E. 1993. Advanced Engineering Mathematics. Seventh Edition. John Wiley & Sons. New York.

Spiegel, M.R. 1986. Analisis Fourier. Erlangga. Jakarta.