REPRESENTASI LEVY-KHINTCHINE DALAM MENENTUKAN BENTUK BAKU DARI FUNGSI KARAKTERISTIK TERBAGI TAK HINGGA

TESIS

Oleh :

EDIZON
06215066

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Representasi Levy-Khintchine Dalam Menentukan Bentuk Baku Dari Fungsi Karakteristik Terbagi Tak Hingga.

oleh: Edizon

(Di bawah bimbingan Maiyastri dan Izzati Rahmi. HG)

RINGKASAN

Pada ilmu statistik fungsi sebaran merupakan hal yang penting untuk dipelajari. Penciri dari fungsi sebaran tersebut dinamakan fungsi karakteristik. Salah satu jenis fungsi karakteristik adalah fungsi karakteristik terbagi tak hingga. Fungsi karakteristik terbagi tak hingga berasal dari peubah acak terbagi tak hingga yaitu peubah acak yang saling bebas dan memiliki sebaran identik.

Bentuk umum dari fungsi karakteristik dikemukakan oleh Levy dan Khintchine dalam bentuk Representasi Levy-Khintchine. Bentuk umum tersebut ternyata berbeda dari beberapa referensi. Perbedaan itu dapat dilihat dari variabel yang digunakan bahkan pola bentuk umumnya. Berdasarkan hal itu maka dilakukan penelitian ini.

Tujuan penelitian : 1) Mengkaji bentuk-bentuk representasi Levy-Khintchine. 2) Membuktikan kesamaan bentuk dari representasi Levy-Khintchine. 3) Memilih bentuk representasi Levy-Khintchine yang efektif digunakan dalam menentukan bentuk baku dari fungsi karakteristik terbagi tak hingga kemudian menunjukan pembuktiannya. 4) Memberikan contoh cara penggunaan teorema representasi Levy-Khintchine dalam menentukan sebuah bentuk fungsi karakteristik merupakan keluarga fungsi terbagi tak hingga atau tidak.

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis, dengan lagkah-langkah sebagai berikut : 1) Menyiapkan referensi tentang bentuk-bentuk representasi Levy-Khintchine. 2) Mengkaji dan menganalisa bentuk-bentuk yang cukup berbeda baik dari segi penulisan variabel , konstanta maupun dari segi bentuk atau pola secara umum. 3) Memilih bentuk-bentuk representasi yang berbeda kemudian membuktikan kesamaannya. 4) Mengambil kesimpulan tentang bentuk umum yang lebih efektif. 5) Melakukan pembuktian teorema Levy-Khintchine.

Pembahasan pada kajian ini adalah menganalisis perbedaan bentuk umum dari fungsi karakteristik terbagi tak hingga, membuktikan kesamaan bentuk umum dari representasi Levy-Khintchine, membuktikan teorema Levy-Khintchine dan memberikan contoh penggunaan terhadap fungsi karakteristik dari sebaran normal dan sebaran Poisson.

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan : 1) Dari beberapa referensi ternyata bentuk baku representasi Levy-Khintchine terdapat perbedaan. 2) Setelah dilakukan pembuktian maka representasi Levy-Khintchine adalah sama. 3) Bentuk representasi Levy-Khintchine yang dikemukakan oleh Laha lebih praktis dan efektif. 4) Fungsi karakteristik dari sebaran Normal dan fungsi karakteristik dari sebaran Poisson merupakan keluarga dari fungsi terbagi tak hingga.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Fungsi sebaran merupakan salah satu konsep dasar yang terdapat dalam statistika dan merupakan landasan bagi konsep-konsep statistika lainnya. Fungsi sebaran yang sering dipakai diantaranya adalah fungsi sebaran normal, fungsi sebaran Poisson dan lain-lain.

Pada pengujian terhadap parameter tertentu dalam statistika sering memakai anggapan kenormalan yaitu data mempunyai sebaran normal. Pada beberapa pemakai sering anggapan kenormalan tersebut diabaikan pengujiannya dengan anggapan bahwa data dalam kehidupan ini sudah tersebar secara normal.

Anggapan terhadap kenormalan di atas disatu sisi dapat digunakan karena pemakai menggunakan teorema limit pusat Levy untuk membenarkan tindakannya. Teorema limit pusat Levy tersebut menyatakan:

Misalkan $\{X_n\}$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan mempunyai sebaran identik dengan $0 \langle Var(X_n) = \sigma^2 \langle \infty$. Misalkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, maka untuk setiap $x \in \Re$, $\underset{n \to \infty}{Lim}\, P\left\{\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ (Laha, 1979:287).

Teorema limit pusat di atas menyatakan bahwa fungsi sebaran dari $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}}$ akan mempunyai pola yang sama dengan fungsi sebaran normal baku untuk n yang besar dengan syarat $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ saling bebas dan mempunyai sebaran identik.

Landasan dari teorema limit pusat menurut Gnedenko (1968:68) adalah teori tentang sebaran terbagi tak hingga. Sebaran ini merupakan fungsi sebaran dari peubah acak terbagi tak hingga. Suatu peubah acak Y dikatakan terbagi tak hingga jika untuk setiap $n \in N$, $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dengan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan peubah acak yang saling bebas dan memiliki sebaran identik. Lebih lanjut Gnedenko menyatakan bahwa $F(x)$ merupakan fungsi sebaran dari peubah acak terbagi tak hingga jika dan hanya jika fungsi karakteristiknya $\varphi(t)$ dapat dinyatakan sebagai $\varphi(t) = [\varphi_n(t)]^n$ dengan $\varphi_n(t)$ merupakan fungsi karakteristik masing-masing setelah dibagi sebanyak n bagian untuk $n \in N$.

Berdasarkan definisi sebaran terbagi tak hingga di atas dapat dinyatakan bahwa jika Y suatu peubah acak terbagi tak hingga maka dapat diperoleh peubah acah-peubah acak yang lain yang saling bebas dan memiliki sebaran identik. Dan jika digunakan teorema limit pusat Levy di atas maka jumlah peubah acak tersebut konvergen ke normal.

Sebuah fungsi sebaran akan mempunyai fungsi karakteristik yang merupakan suatu penciri dari suatu sebaran. Perannya sama dengan fungsi pembangkit momen, tapi fungsi pembangkit momen hanya terbatas pada ruang riil saja sedangkan fungsi karakteristik pada ruang kompleks. Hal ini berarti fungsi karakteristik lebih bersifat umum dibandingkan dengan fungsi pembangkit momen dengan kata lain sebuah sebaran bisa saja fungsi pembangkit momennya tidak ada tetapi fungsi karakteristik selalu ada.

Sebuah sebaran yang sudah diketahui fungsi karakteristiknya dapat ditentukan apakah bentuk atau polanya sesuai dengan bentuk yang diberikan oleh

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dari uraian di atas maka dapat diambil beberapa kesimpulan antara lain:

1. Dari beberapa referensi ternyata bentuk baku dari Representasi Levy-Khintchine terdapat perbedaan, ada yang hanya berbeda lambang dari peubah atau konstanta dan ada juga yang berbeda dari segi bentuk atau polanya.
2. Setelah melakukan pembuktian maka pada dasarnya semua bentuk Representasi Levy-Khintchine menghasilkan nilai yang sama.
3. Bentuk Representasi Levy-Khintchine yang dikemukakan oleh Laha (1979:239) lebih praktis dan efektif digunakan untuk menentukan apakah suatu fungsi karakteristik merupakan fungsi terbagi tak hingga atau tidak, karena bentuk atau formulanya lebih sederhana.
4. Fungsi karakteristik dari sebaran Normal dan fungsi karakteristik dari sebaran Poisson merupakan keluarga dari fungsi terbagi tak hingga. Hal ini dapat diketahui karena polanya sesuai dengan pola bentuk umum dari Representasi Levy-Khintchine.

5.2. Saran-saran

Beberapa saran yang dapat penulis berikan kepada pembaca adalah sebagai berikut:

1. Pada tesis ini diberikan contoh penggunaan representasi Levy-Khintchine terhadap fungsi karakteristik dari sebaran Normal, sebaran Poisson , untuk itu

penulis sarankan kepada pembaca atau peneliti lain agar mencobakannya terhadap fungsi karakteristik lain dan mencoba membuat kesimpulan sendiri apakah fungsi karakteristik tersebut merupakan keluarga fungsi terbagi tak hingga atau tidak.

2. Karena keterbatasan waktu, tenaga dan pengetahuan penulis dalam menulis kajian tentang materi pada tesis ini maka penulis sarankan agar para peneliti berikutnya dapat mengembangkannya terhadap materi lanjutan seperti kajian mendalam tentang fungsi karakteristik, fungsi distribusi dan fungsi sebuah ukuran.

DAFTAR PUSTAKA

Ash, Robert. B (1972). Probability And Mathematical Statistics. A Series of Monographs and Text Books, University of Illinois: New York.

Bain, Lee.J & Engelhardt,Max. (1992). Introduction to probability and mathematical statistics. Sekon edition. Pws. Kent Publishing Company: Boston.

Breiman, Leo (1992). Probability, Classics in Aplied Mathematics. University of California.

Chow, Yuan Shih & Henry Teicher. (1977). Probability Theory . Independence Interchangability,Martiangales. Springer-Verlag: New York.

Dudewicz, Edward J & Mishra, Satya N. (1988). Statistika Matematika Modern. ITB: Bandung.

Francesco Mainardi & Sergei Rgosin (2006). The Origin of Infinitely Disible Distributions. Belarusian State University: Belarus.

Gnedenko, B.V & Kolmogorov, A.N. (1967). Limit Distribution For Sums Of Independent Random Variables. Addison Wesley Publishing Company: Canada.

Hogg , Robert V & Craig, Allen T. (1978). Introduction to Mathematical Statistics, Fourth edition. Macmillan Publishing Co, Inc: New york.

Laha, R.G & Rohatgi, V.K. (1979). Probability Theory. Jhon Willey & Sons: New York.

Miller, Irwin dan Miller Maryless. (1999). Mathematical Statistic, sixth edition, Prentice-Hall International. Inc: New Jersey.

Peter Carr & Liuren Wu . (2002). Time-Changed Levy Processes and Option Pricing, Courant Institute: New York University.

Purcell. J Edwin. (1992). Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 2. ITB: Bandung.