SOLUSI POSITIF *EVENTUAL* SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN ORDE SATU

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

YULIAN SARI

07 134 018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2011

ABSTRAK

Skripsi ini membicarakan tentang solusi positif *eventual* sistem persamaan diferensial linier orde satu. Syarat cukup agar solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu adalah positif *eventual* diajukan. Beberapa sifat dari suatu matriks A yang eksponensial positif *eventual* juga dibicarakan. Sifat-sifat *strong* Perron-Frobenius digunakan dalam membuktikan syarat cukup agar solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu positif *eventual*. Hasil akhir dari skripsi adalah untuk sistem persamaan diferensial linier $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, jika $A + aI$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut adalah positif *eventual* untuk setiap $\mathbf{x}_0 > 0$.

Kata Kunci : *Matriks eksponensial positif eventual, Matriks positif eventual, Strong Perron-Frobenius.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.1.1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, dan $\dot{\mathbf{x}} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$. Dalam literatur [2,3,6] dinyatakan bahwa solusi sistem (1.1.1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 \tag{1.1.2}$$

Perlu diperhatikan bahwa solusi (1.1.2) dapat bernilai positif atau nonpositif. Salah satu cara agar $\mathbf{x}(t)$ dalam (1.1.2) bernilai positif adalah $e^{tA} > 0$ dan $\mathbf{x}_0 > 0$. Dalam situasi tertentu, e^{tA} tidak selalu positif, tetapi mungkin saja ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0$, $\forall\, t \geq t_0$. Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ yang mempunyai sifat ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0\ \forall\, t \geq t_0$ disebut sebagai matriks eksponensial positif *eventual*. Untuk sistem (1.1.1) dengan $\mathbf{x}_0 > 0$, jika matriks A adalah eksponensial positif *eventual*, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut dinamakan sebagai solusi positif *eventual*.

Asumsikan bahwa $\mathbf{x}_0$ positif. Jika diinginkan solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem (1.1.1) adalah positif *eventual*, maka perlu dikaji syarat-syarat agar terdapat

$t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0,\ \forall\, t \geq t_0$. Pengkajian hal tersebut menjadi topik yang menarik.

Dalam [6] dinyatakan bahwa A adalah matriks eksponensial positif *eventual* jika dan hanya jika ada $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \geq 0$ sedemikian sehingga $A + aI$ mempunyai sifat *strong* Perron-Frobenius. Skripsi ini memaparkan kembali tentang syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh matriks A sedemikian sehingga solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem (1.1.1) adalah positif *eventual*. Beberapa contoh diberikan untuk mengilustrasikan hal tersebut dengan menggunakan perangkat lunak, Matlab 6.5, untuk mempermudah penghitungan.

1.2 Perumusan Masalah

Untuk sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, syarat apakah yang harus dipenuhi oleh matriks A, agar solusi sistem tersebut adalah positif *eventual*.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan dibatasi dengan mengasumsikan syarat awal $\mathbf{x}_0$ adalah positif.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengkaji syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh matriks A agar solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ adalah positif *eventual*.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan ini terdiri dari empat bab, yakni:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab pertama ini berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang telah dibuat dan dibahas pada bab-bab sebelumnya, maka syarat cukup agar solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > 0$ positif *eventual* adalah matriks $A + aI$ positif *eventual* untuk suatu $a \geq 0$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga. Jakarta.

[2] Boyce, W. E and R. C. Diprima. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Eight edition. John Wiley, New York.

[3] Cullen, C. G. 1990. *Linear Algebra and Differential Equations*. Second edition. PWS-KENT. Massachusetts.

[4] Finizio, N dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta.

[5] Gentle, James E. 2007. *Matrix Algebra Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer. New York.

[6] Horn, R. A. and Johnson R. C. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University. Cambridge.

[7] Noutsos, D. and M. J. Tsatsomeros. 2008. Reachability and Holdability of Nonnegatif States. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 30:700-712.

[8] Noutsos, D. 2006. On Perron-Frobenius Property of Matrices Having Some Negative Entries. *Linear Algebra and Its Applications*. 412:132-153.

[9] Arrowsmith, D. K. and C. M. Place. 1990. *Ordinary Differential Equations*. Chapter and Hall. London.