SYARAT PERLU DAN CUKUP UNTUK KETERKONTROLAN SISTEM KONTROL LINIER

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :

MEKI SURYANI
06 134 007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG

2010

ABSTRAK

Tujuan utama dari skripsi ini adalah untuk membuktikan syarat perlu dan cukup untuk keterkontrolan sistem kontrol linier

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

dengan $A \in M_{n\times n}, B \in M_{n\times m}$.

Selain itu, juga dibuktikan syarat perlu dan cukup untuk keterkontrolan sistem

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = P\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t), \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0,$$

yang diperoleh melalui suatu transformasi $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, untuk suatu matriks nonsingular T. Beberapa contoh disajikan untuk memperjelas hasil akhir.

Kata kunci: *Syarat perlu dan cukup, sistem kontrol linier, keterkontrolan.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertimbangkan sistem persamaan diferensial linier non homogen orde satu berikut ini:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\,,\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.1.1}$$

dengan $A \in M_{n\times n}$, $B \in M_{n\times m}$, dan $M_{n\times m}$ adalah matriks-matriks riil berukuran $n \times m$.

Jika $\mathbf{u}(t)$ dan $\mathbf{x}_0$ diberikan, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ persamaan diferensial linier (1.1.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Dalam teori kontrol, sistem yang seperti sistem (1.1.1) sering disebut sebagai model sistem kontrol linier. Dalam hal ini $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan variabel keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan variabel input (kontrol), dan t menyatakan waktu. Sistem (1.1.1) dikatakan invarian terhadap waktu jika matriks-matriks A dan B adalah matriks-matriks konstan yang tidak bergantung pada waktu.

Salah satu isu utama dalam teori sistem kontrol linier adalah masalah keterkontrolan dari sistem (1.1.1). Sistem (1.1.1) dikatakan terkontrol jika ada suatu pengontrol $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ dan suatu waktu $t_f > 0$ yang dapat membawa keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan yang diinginkan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, dan secara matematis dapat ditulis

$$\mathbf{x}_f = e^{A(t_f - t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f - \tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Pernyataan ini menjelaskan bahwa dalam teori kontrol, vektor $\mathbf{u}(t)$ adalah sesuatu yang tidak diketahui dan mesti dicari.

Pencarian vektor kontrol ini bukanlah merupakan suatu masalah yang sederhana. Oleh karena itu perlu dicari suatu kriteria yang lebih mudah untuk menentukan apakah suatu sistem kontrol linier terkontrol atau tidak. Skripsi ini mengemukakan kriteria untuk mengetahui apakah suatu sistem terkontrol atau tidak.

1.2 Perumusan Masalah

1. Bagaimana bentuk syarat perlu dan cukup agar suatu sistem kontrol linier (1.1.1) terkontrol?
2. Misalkan terhadap sistem (1.1.1) dilakukan transformasi

   $$\mathbf{x} = T\mathbf{z}$$

   untuk suatu matriks nonsingular T, sedemikian sehingga terbentuk sistem yang baru, yakni:

   $$\dot{\mathbf{z}}(t) = P\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \tag{1.2.1}$$

   dengan $TAT^{-1} = P$, $TB = D$. Apakah keterkontrolan sistem (1.1.1) berakibat keterkontrolan sistem (1.2.1)?

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Keterkontrolan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

ekivalen dengan

$$rank\ M_c = n, \tag{4.1.1}$$

dan ekivalen juga dengan matriks

$$M_s = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau$$

nonsingular untuk semua $t_f > 0$.

Jika sistem (4.1.1) terkontrol maka keterkontrolan sistem (4.1.1) ekivalen dengan keterkontrolan sistem

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = P\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{4.1.2}$$

yang diperoleh dari sistem (4.1.1) melalui transformasi $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ untuk sebarang matriks nonsingular T.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Lima.* Erlangga. Jakarta.

[2] Apte. Y. S. 1981. *Linier Multivariabel Control Theory.* Tata McGraw-Hill Published Company Limited. New Delhi.

[3] Barnett, S. and Cameron, R. G. 1985. *Introduction to Control Theory.* Oxford Clarendon Press, Second Edition.

[4] Datta, Biswa Nath.2003. *Numerical Method for Linier Control System Design and Analysis.*Elsevier Academic Press. London.

[5] Gopal, M. 1987. *Modern Control System Theory.* John Wiley & Sons. Singapore.

[6] Horn, R. A and R. J. Charles. 1999. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, USA.

[7] Finizio, N dan G.Ladas. 1988. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Edisi Kedua. Erlangga. Jakarta.

[8] Masten, M. K. 1995. *Modern Control Systems.* Institute Of Electrical and Engineers.USA.