SYARAT PERLU DAN CUKUP UNTUK KETEROBSERVASIAN SISTEM KONTROL LINIER

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

RAFIQA

05 134 054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2010

ABSTRAK

Skripsi ini membicarakan masalah keterobservasian sistem kontrol linier invarian terhadap waktu. Suatu sistem kontrol linier dikatakan invarian terhadap waktu jika untuk sebarang keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dalam $t_0 \leq t \leq t_1$, ada waktu $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga jika kontrol $\mathbf{u}(t)$ dan output $\mathbf{y}(t)$ pada $t_0 \leq t \leq t_1$ diketahui, maka $\mathbf{x}_0$ dapat ditentukan secara tunggal.

Syarat perlu dan cukup agar suatu sistem kontrol linier terobservasi diberikan dalam bentuk kriteria aljabar.

Kata kunci: *Sistem kontrol linier, keterobservasian, rank*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertimbangkan sistem kontrol linier berikut ini

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{1.1.1}$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan variabel keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ menyatakan variabel input (kontrol), $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan variabel output dan t menyatakan waktu. Dalam sistem (1.1.1), $A \in M_{n\times n}, B \in M_{n\times r}, C \in M_{m\times n}$, dengan $M_{m\times n}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $m \times n$. Sistem (1.1.1) dikatakan invarian terhadap waktu jika A, B dan C adalah matriks-matriks yang tidak bergantung pada waktu.

Persamaan (1.1.1) merupakan suatu persamaan differensial linier orde satu. Jika $\mathbf{u}(t)$ dan $\mathbf{x}_0$ diberikan, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ dari persamaan (1.1.1) adalah.

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau\right).$$

Salah satu isu utama dalam teori kontrol adalah mencari kontrol $\mathbf{u}(t)$ yang dapat membawa keadaan awal $\mathbf{x}_0$ menjadi keadaan akhir $\mathbf{x}_f$ yang diinginkan dalam waktu $t_f > 0$. Jelas bahwa, isu ini menyatakan bahwa $\mathbf{u}(t)$ merupakan sesuatu yang tidak di ketahui dan mesti dicari.

Isu penting lainnya adalah jika input $\mathbf{u}(t)$ dan output $\mathbf{y}(t)$ diberikan dalam waktu $0 \leq t \leq t_f$, apakah keadaan awal $\mathbf{x}_0$ dapat ditentukan?. Jika $\mathbf{x}_0$ dalam isu terakhir ini dapat ditentukan secara tunggal, maka sistem (1.1.1) disebut terobservasi.

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Jika diberikan

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 6, & t \geq 0 \end{cases}$$

dan $y(t) = 1 - 3e^{-2t} + 4e^{-3t}$, maka dengan perhitungan yang cukup rumit, diperoleh

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}6561 \\ 0{,}611 \end{pmatrix}.$$

Ini menunjukkan bahwa sistem (1.1.2) terobservasi.

Sedangkan untuk sistem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.1.3}$$

Jika diberikan $u(t) = 0$ dan $y(t) = 2e^{-3t}$, maka setelah melakukan beberapa perhitungan, keadaan awal $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ tidak dapat ditentukan. Ini menunjukkan bahwa sistem (1.1.3) tidak terobservasi.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Untuk sistem kontrol linier berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Syarat perlu dan cukup untuk keterobservasian sistem (4.1.1) adalah

1. $\text{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$

2. $\ker\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = 0.$

Jika sistem diatas terobservasi, untuk sistem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= E\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= F\mathbf{z}(t) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

yang diperoleh dengan transformasi $\mathbf{x} = P\mathbf{z}$ untuk sebarang matrks nonsingular P, maka sistem (4.1.2) juga terobservasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Lima.* Erlangga. Jakarta.

[2] Apte. Y. S. 1981. *Linier Multivariabel Control Theory.* Rajkamal Elektric Press. New Delhi.

[3] Barnett, S. and Cameron, R. G. 1985. *Introduction to Control Theory.* Oxford Clarendon Press, Second Edition.

[4] Gopal, M. 1987. *Modern Control System Theory.* John Wiley & Sons (SEA) Pte. Ltd. Singapore.

[5] Horn, R. A and R. J. Charles. 1999. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, USA.

[6] Finizio, N dan G.Ladas. 1988. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Edisi Kedua. Erlangga. Jakarta.

[7] Masten, M. K. 1995. *Modern Control Systems.* Institute Of Electrical and Engineers.USA.

[8] Olsder, G. J And J. W. Van Der Woude. 1994. *Mathematical System Theory.* Delftse Uitgevers Maatschappij. Netherland.