MENSTABILKAN SUATU SISTEM KONTROL LINIER

SKRIPSI

Oleh

RAHMA SHISLINA

06934006

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2010

ABSTRAK

Diberikan sistem kontrol linier berikut ini

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

dengan $A \in M_{n \times n}$ dan $B \in M_{n \times m}$. Sistem ini stabil jika dan hanya jika semua nilai eigen matriks A mempunyai bagian riil negatif. Dalam hal sebaliknya sistem adalah tak stabil. Dalam beberapa situasi sistem yang tak stabil masih dapat distabilkan. Skripsi ini membicarakan bagaimana cara menstabilkan sistem yang tak stabil. Hasil menunjukkan bahwa syarat perlu dan cukup agar sistem tersebut dapat distabilkan adalah rank $(A - \lambda I, B) = n$ untuk setiap $\mathrm{re}(\lambda) \geq 0$, dengan λ adalah nilai eigen matriks A.

Kata kunci : *sistem kontrol linier, menstabilkan, matriks feedback.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertimbangkan sistem kontrol linier berikut ini:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\,,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.1.1}$$

dengan $A \in M_{n \times n}$, $B \in M_{n \times m}$, dan $M_{n \times m}$ adalah himpunan matriks-matriks riil berukuran $n \times m$.

Jika $\mathbf{u}(t)$ dan $\mathbf{x}_0$ diberikan, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ persamaan diferensial linier (1.1.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\left[\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B\mathbf{u}(s)ds\right].$$

Dalam teori sistem kontrol, sistem yang seperti (1.1.1) sering disebut sebagai model sistem kontrol linier. Dalam hal ini $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan variabel keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan variabel input (kontrol), dan t menyatakan waktu. Untuk selanjutnya, sistem (1.1.1) dapat ditulis sebagai (A, B). Sistem (1.1.1) dikatakan invarian terhadap waktu jika matriks-matriks A dan B adalah matriks-matriks konstan yang tidak bergantung pada waktu.

Salah satu isu utama dalam teori sistem kontrol linier adalah masalah keterkontrolan dari sistem (1.1.1). Sistem (1.1.1) dikatakan terkontrol jika ada suatu pengontrol $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ dan suatu waktu $t_f > 0$ yang dapat membawa

keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan yang diinginkan $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, dan secara matematis dapat ditulis

$$\mathbf{x}_f = e^{At_f}\left[\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f - s)} B\mathbf{u}(s)ds\right].$$

Pernyataan ini menjelaskan bahwa dalam teori kontrol, vektor $\mathbf{u}(t)$ adalah sesuatu yang tidak diberikan, dan mesti dicari.

Isu utama lainnya adalah menentukan apakah sistem (1.1.1) stabil atau tidak. Secara umum, kestabilan sistem (1.1.1) dapat dimaknai sebagai solusi $\mathbf{x}(t)$ dari sistem (1.1.1) yang pada mulanya cukup dekat dari suatu titik tertentu, maka $\mathbf{x}(t)$ akan lebih dekat lagi dari titik tersebut dengan berlalunya waktu. Salah satu kriteria yang paling populer digunakan untuk menentukan apakah sistem (1.1.1) stabil atau tidak adalah kriteria nilai eigen matriks A. Dalam literatur [4] dan [5] dinyatakan bahwa sistem (1.1.1) stabil jika dan hanya jika semua nilai eigen matriks A mempunyai bagian riil negatif. Sebaliknya jika ada nilai eigen matriks A yang memiliki bagian riil non negatif, maka sistem tak stabil.

Pada beberapa situasi, kadang-kadang ada juga sistem yang tak stabil, tetapi sistem tersebut dapat distabilkan. Sebagai contoh, pertimbangkan sistem (1.1.1) dengan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Nilai eigen matriks A adalah $\frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{47}}{2}$.

BAB IV

KESIMPULAN

Syarat perlu dan cukup agar suatu sistem kontrol linier

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{4.1.1}$$

dengan $A \in M_{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n\times m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, dapat distabilkan jika dan hanya jika rank $(A - \lambda I, B) = n$ untuk semua $\mathrm{re}(\lambda) \geq 0$, dengan λ adalah nilai eigen matriks A. Selain itu, jika sistem (4.1.1) terkontrol, maka mestilah dapat distabilkan.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

[1] Anton, H. dan Pantur, S. 1990. *Aljabar Linier Elementer.* Edisi Ketiga. Erlangga. Jakarta.

[2] Kreyszig, E. 1991. *Matematika Teknik Lanjutan.* Edisi Keenam. Erlangga. Jakarta.

[3] Ladas, F. dan Santoso, W. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Erlangga. Jakarta.

[4] Nath Datta, B. 2004. *Numerical Methods For Linear Control Systems.* Elsevier Academic Press, USA.

[5] S. Barnett and R. G. Cameron. 1985. *Introduction to Mathematical Theory.* Second Edition. Oxford Clarendon Press.

[6] Terrel, William J. 1999. *Some Fundamental Control Theory I : Controllability, Observability, and Duality.* Department of Mathematical Sciences, Virginia, Commonwealth University, Richmond, VA 23284-2014. wterrell@atlas.ucu.edu.