

**HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR  
EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA**

**TESIS**

Oleh :

**GUSTINA**  
06215092



**PROGRAM PASCASARJANA  
UNIVERSITAS ANDALAS  
2008**

# HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS $AB$ DAN $BA$

Oleh : GUSTINA  
No.BP : 06215092

(Di bawah Bimbingan Muhafzan, Ph.D dan Zulakmal, M.Si)

## RINGKASAN

Misalkan  $A$  adalah matriks  $m \times n$  dan  $B$  matriks  $n \times m$  dengan  $m \leq n$ , maka perkalian kedua matriks  $A$  dan  $B$ , yakni  $AB$  dan  $BA$  akan menghasilkan suatu matriks bujur sangkar. Untuk  $n = m$  dan  $B$  non singular, maka  $AB = (B^{-1}B)AB = B^{-1}(BA)B$ , yang menunjukkan bahwa  $AB$  similar dengan  $BA$ . Dilain pihak jika  $A$  dan  $B$  keduanya singular, maka  $AB$  tidak perlu similar dengan  $BA$ . Tetapi jika  $m \leq n$ , apa yang dapat disimpulkan tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $AB$  dan  $BA$ ?

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui hubungan antara nilai eigen dan vector eigen dari  $AB$  dan  $BA$  jika  $A_{m \times n}$  dan  $B_{n \times m}$ ,  $m \leq n$ .

Landasan teori atau konsep yang digunakan dalam menentukan hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari  $AB$  dan  $BA$  jika  $A_{m \times n}$  dan  $B_{n \times m}$ ,  $m \leq n$  adalah matriks, kebebasan linier, basis dan dimensi, rank, nilai eigen dan vektor eigen, similarities (keserupaan), matriks simple dan matriks devectorive, multiplisitas geometri dan ruang null.

Pembahasan atas permasalahan dilakukan berpedoman pada teori-teori tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari  $AB$  dan  $BA$ . Penelitian dilakukan

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Misalkan  $A$  adalah matriks  $m \times n$  dan  $B$  matriks  $n \times m$  dengan  $m \leq n$ , maka perkalian kedua matriks  $A$  dan  $B$ , yakni  $AB$  dan  $BA$ , akan menghasilkan suatu matriks bujur sangkar. Untuk  $n = m$  dan  $B$  non singular, maka

$$AB = (B^{-1}B)AB = B^{-1}(BA)B ;$$

yang menunjukkan bahwa  $AB$  similar dengan  $BA$ . Dilain pihak jika  $A$  dan  $B$  keduanya singular, maka  $AB$  tidak similar dengan  $BA$ . Untuk itu, perhatikan contoh berikut.

Diberikan matriks  $A$  dan  $B$  berikut ini:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari  $AB$  dan  $BA$  adalah  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Matriks  $AB$  adalah matriks *simple* dan matriks  $BA$  adalah matriks *defective*. Matriks sederhana tidak mungkin *similar* dengan matriks *defective*.

Jika  $m \leq n$ , apa yang dapat disimpulkan tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $AB$  dan  $BA$ ?

## 1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah yang akan dikemukakan pada tesis ini adalah: Diberikan matriks riil  $A_{m \times n}$  dan  $B_{n \times m}$ ,  $m \leq n$ . Bagaimanakah hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari  $AB$  dan  $BA$ ?

## 1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari  $AB$  dan  $BA$  jika  $A_{m \times n}$  dan  $B_{n \times m}$ ,  $m \leq n$ .

## 1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya dan menambah wawasan mengenai konsep hubungan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $AB$  dan  $BA$  jika diketahui matriks  $A_{m \times n}$  dan  $B_{n \times m}$ ,  $m \leq n$ .

## BAB V

### KESIMPULAN

Misalkan  $A$  adalah matriks  $m \times n$  dan  $B$  adalah matriks  $n \times m$  dengan  $m \leq n$ , maka berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab IV diperoleh kesimpulan dari hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $AB$  dan  $BA$ , yaitu :

- Jika  $u$  adalah vektor eigen dari  $AB$  dengan nilai eigennya adalah  $\lambda = \lambda_0$  dimana  $\lambda_0 \neq 0$  maka  $Bu$  adalah vektor eigen dari  $BA$  dengan nilai eigen yang sama yaitu  $\lambda = \lambda_0$ .
- Jika diketahui polinomial karakteristik dari  $AB$  adalah  $c_{AB}(\lambda)$  maka polinomial karakteristik dari  $BA$  adalah  $c_{BA}(\lambda) = \lambda^{n-m} c_{AB}(\lambda)$ . Sedangkan jika  $m = n$  maka  $c_{BA}(\lambda) = c_{AB}(\lambda)$ .
- Jika diketahui  $AB$  adalah matriks simple maka  $BA$  matriks simple jika dan hanya jika  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$ .

## DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1988. Aljabar linier. Erlangga. Bandung.

Baker, R. 2003. Linear Algebra. Rinton Press. Inc. New York

Goldberg, J.L. 1991. Matriks Theory with Applications. McGraw-Hill. Inc. New York

Jacob, B. 1990. Linear Algebra. W.H Freeman and Company. New York

Meyer, C.D. 2000. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Siam. Philadelphia

MILIK  
LIST PERPUSTAKAAN  
UNIVERSITAS ANDALAS