GRAF-GRAF BERORDE *n*

DENGAN BILANGAN KROMATIK LOKASI *n* - 1

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH

YOGI DARVIN AGUNG

BP: 06 134 042

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2011

ABSTRAK

Misalkan c suatu pewarnaan pada graf terhubung G. Misalkan $\prod = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah suatu partisi terurut dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk suatu titik v di G, kode warna $c_{\prod}(v)$ dari v adalah k-tuple terurut

$$(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)\ ),$$

dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) |\ x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap $\prod$, maka c disebut pewarnaan lokasi (*locating coloring*) bagi G. Bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G)$ adalah minimum dari banyaknya warna pada pewarnaan lokasi di G. Hal ini menunjukkan bahwa, jika G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 3$ yang diinduksi oleh subgraf multipartit lengkap berorde $n - 1$, maka $\frac{n+1}{2} \leq \chi_L(G) \leq n$. Graf dengan orde n yang diinduksi oleh subgraf multipartit lengkap berorde $n - 1$ digunakan untuk mengkarakterisasi graf dengan orde $n \geq 4$ yang mempunyai bilangan kromatik lokasi $n - 1$. Selanjutnya untuk $n \geq 5$, jika $G = G_n + 2K_2$ dengan G_n adalah suatu graf multipartit lengkap berorde $n - 4$ dan K_2 adalah graf lengkap berorde 2, maka G adalah graf dengan bilangan kromatik lokasi $n - 1$.

Kata kunci: *Himpunan lokasi, Pewarnaan lokasi, Bilangan kromatik lokasi*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan dengan titik dan sisi. Titik menggambarkan objek-objek tertentu dan sisi menggambarkan hubungan antara objek-objek tersebut. Misalkan graf merepresentasikan bentuk molekul air yang terdiri dari atom hydrogen dan oksigen. Masalah dan solusi yang didapat dari contoh kasus tersebut merupakan teknik dari teori graf, yaitu dengan titik-titik graf menyatakan atom dan sisi-sisi graf menyatakan ikatan antara atom-atom tersebut.

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi akhir-akhir ini, banyak sekali penelitian terbaru tentang graf, mulai dari jenis-jenis graf, dimensi partisi, pewarnaan lokasi, dan lain-lain. Perkembangan teori graf telah banyak memberikan masukan kepada ilmu yang baru, salah satunya adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan kuliah, yaitu dengan meminimalkan banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai setiap titik, sehingga mencegah terjadinya bentrokan waktu kuliah antara perkuliahan yang satu dengan yang lainnya.

Misalkan terdapat suatu graf terhubung G dengan titik v di G. Misalkan terdapat himpunan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ dengan $w_i \in V(G)$, untuk $1 \le i \le k$. Maka k-*tuple* $c_W(v)$ didefinisikan oleh

$$c_W(v) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)),$$

dimana $d(v, w_i)$ adalah jarak antara v dan w_i $(1 \le i \le k)$. Jika untuk setiap $v \in V(G)$ k-vektor $c_w(v)$ berbeda, maka W disebut sebagai **himpunan lokasi** (*locating set*).

Untuk merepresentasikan titik-titik pada graf G, Chartrand dkk [4] melakukan pengelompokan dengan cara mempartisi semua $v \in V(G)$ menjadi dua partisi atau lebih, berdasarkan pewarnaan titik dari graf G tersebut. Jika $v \in V(G)$ dan $C_i \subseteq V(G)$ merupakan himpunan titik di G yang berwarna i, maka jarak antara titik v dan kelas warna C_i didefinisikan sebagai min$\{d(v,x)|x \in C_i\}$. Jika $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π (disebut kode warna dari v, dengan notasi $c_\Pi(v)$), adalah vektor dengan panjang-k $(d(v,C_1), d(v,C_2), \dots, d(v,C_k)$. Jika setiap titik yang berbeda mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut **pewarnaan lokasi** (*locating coloring*) bagi G (atau secara ekivalen, Π disebut himpunan lokasi (*locating set*) bagi G). Pewarnaan lokasi dengan warna yang minimum disebut pewarnaan lokasi minimum, dan kardinalitas dari himpunan yang memuat pewarnaan lokasi minimum disebut **bilangan kromatik lokasi** (*locating chromatic number*) dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.l

Sejauh ini, belum banyak yang mengkaji tentang bilangan kromatik lokasi. Chartrand dkk [4] adalah yang pertama kali mengemukakan tentang konsep bilangan kromatik lokasi ini. Selanjutnya terdapat dua paper lain yang mengkaji konsep bilangan kromatik lokasi, yaitu Chartrand dkk [5] dan Asmiati [1]. Untuk itu, bilangan kromatik lokasi menarik untuk dikaji dan mengetahui bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf terhubung.

Pada umumnya, untuk sembarang graf-graf terhubung G mempunyai beberapa pewarnaan lokasi. Dari hasil kajian tentang bilangan kromatik lokasi sebelumnya diperoleh, jika G adalah suatu graf lengkap dengan orde n, maka bilangan kromatik lokasi bagi G adalah n. Pada tugas akhir ini akan dikaji graf-graf terhubung G berorde n dengan bilangan kromatik lokasi $n-1$.

1.2 Perumusan Masalah

Misal diberikan suatu graf terhubung G. Permasalahan yang akan dikaji dalam tugas akhir ini adalah graf terhubung G dengan orde n mana saja yang mempunyai bilangan kromatik lokasi $n-1$.

1.3 Pembatasan Masalah

Untuk sembarang graf terhubung G, terdapat beberapa graf terhubung G dengan orde n yang mempunyai bilangan kromatik lokasi $n-1$. Dalam tugas akhir ini, permasalahan dibatasi untuk graf-graf terhubung G dengan orde n sebagai berikut:

1. Graf G yang diinduksi oleh subgraf multipartit lengkap berorde $n-1$, untuk $n \geq 3$.
2. Graf $G = G_n + 2K_2$, dengan G_n adalah suatu graf multipartit lengkap berorde $n-4$ dan K_2 adalah graf lengkap berorde 2, untuk $n \geq 5$.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk menunjukkan bahwa graf-graf yang tersebut pada Subbab 1.3 merupakan graf-graf berorde n yang mempunyai bilangan kromatik lokasi $n-1$.

1.5 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini dibagi menjadi empat bab. Bab I, pendahuluan, berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan tugas akhir ini. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, konsep tentang bilangan kromatik lokasi, dan juga dicantumkan beberapa teorema pendukung. Bab III memuat pembahasan mengenai dua kelas graf-graf berorde n dengan bilangan kromatik lokasi $n-1$. Kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Jika $G \in \mathscr{F}$ adalah suatu graf dengan orde n yang diinduksi oleh subgraf multipartit lengkap berorde $n-1$, maka bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut adalah $n-1$.
2. Jika $G \in \mathscr{G}$ adalah suatu graf berorde n dengan $G = G_n + 2K_2$, dimana G_n adalah suatu graf multipartit lengkap berorde $n-4$ dan K_2 adalah graf lengkap berorde 2, maka bilangan kromatik lokasi dari G tersebut adalah $n-1$.

4.2 Saran

Karena masih banyak bilangan kromatik lokasi yang belum ditemukan, penulis menyarankan untuk mengkaji bilangan kromatik lokasi dari graf terhubung G dengan subgraf yang diinduksi berupa graf lengkap, lingkaran, lintasan, atau gabungan dari graf lengkap dan lintasan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asmiati, dkk. 2011. Locating-chromatic number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci.* **1**: 1-8.

[2] Buckey, F. dan Lewinter, M. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, New Jersey

[3] Chartrand, G. dan O.R. Oellermann,.1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGra-Hill, Inc., United States

[4] Chartrand, G., dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89-101.

[5] Chartrand, G., dkk. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math*. **269**: 65-79.