BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Himpunan tak kosong G dikatakan membentuk sebuah grup jika di G didefinisikan suatu operasi biner " * " sedemikian sehingga himpunan G dengan operasi biner tersebut memenuhi sifat tutup, asosiatif, terdapat unsur identitas di G, dan untuk setiap unsur di G mempunyai invers.

Teori representasi grup menjelaskan grup dalam bentuk pemetaan linier. Teori representasi grup dapat digunakan untuk merepresentasikan anggota-anggota grup dalam bentuk matriks sehingga operasi grup dapat diwakili oleh perkalian matriks. Teori ini mencakup konsep-konsep pemahaman terhadap grup hingga.

Misalkan G adalah grup hingga dan $Gl_n(\mathbb{C})$ adalah grup yang terdiri dari matriks bujur sangkar $n \times n$ yang dapat dibalik dengan entri-entrinya adalah bilangan kompleks. Maka homomorfisma grup $\rho : G \to Gl_n(\mathbb{C})$ adalah representasi grup hingga G. Salah satu teori yang membantu untuk memahami teori representasi adalah teori tentang $\mathbb{C}G$-modul, yaitu suatu ruang vektor atas $\mathbb{C}$ yang di dalamnya didefinisikan suatu perkalian dengan $g \epsilon G$ yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Misalkan V suatu $\mathbb{C}G$-modul, dan terdapat pemetaan $\rho : V \to V$ yang didefinisikan dengan $\rho(v) = gv$. Maka matriks $[g]_\beta$ adalah matriks pemetaan ρ relatif terhadap β, dimana β adalah suatu basis dari V.

Misalkan $\rho : G \to Gl_n(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi grup dengan $\rho(g)$ matriks berukuran $n \times n$. Jika terdapat suatu pemetaan $\chi : G \to \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $\chi(g) = tr\big(\rho(g)\big)$ dimana $tr\big(\rho(g)\big)$ adalah penjumlahan entri-entri diagonal dari suatu matriks $\rho(g)$, maka χ dinamakan karakter dari ρ. Misal V suatu $\mathbb{C}G$-modul dengan basis

β. jika terdapat suatu pemetaan $\chi : G \to \mathbb{C}$ yang didefinisikan $\chi(g) = tr[g]_\beta$, maka χ adalah karakter dari V. Konsep karakter ini banyak digunakan dalam perkembangan teori representasi. Sehingga Penulis tertarik untuk membahas lebih lanjut tentang karakter di dalam tugas akhir ini.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan sifat-sifat karakter dari suatu representasi grup dan $\mathbb{C}G$-modul.

1.3 Pembatasan Masalah

Karakter dari suatu representasi grup terbagi menjadi beberapa teori yang tergantung pada grup yang diwakili. Pada tulisan ini hanya akan dibahas sifat-sifat karakter dari suatu representasi grup dan $\mathbb{C}G$-modul yang diberikan dari ruang vektor berdimensi hingga dan grup hingga G.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan sifat-sifat karakter dari suatu representasi grup.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori memuat tentang beberapa dafinisi dan teorema yang mendasari bagian pembahasan, yaitu matriks dan invers matriks, teori tentang grup, ruang vektor, dan representasi $\mathbb{C}G$-modul. Bab III Pembahasan merupakan bagian inti dari penulisan yang membahas mengenai definisi dari karakter serta contoh yang mendukung masalah karakter tersebut. Bab IV Kesimpulan berisikan kesimpulan dari masalah yang telah dibahas sebelumnya.