KARAKTERISTIK SOLUSI KUADRAT TERKECIL

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

oleh :

REFNI MARCHELINA

BP. 0810432022

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

2012

KARAKTERISTIK SOLUSI KUADRAT TERKECIL

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

oleh :

REFNI MARCHELINA

BP. 0810432022

Dosen Pembimbing:

NOVA NOLIZA BAKAR, M. Si

Dr. SUSILA BAHRI

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	REFNI MARCHELINA
No. Buku Pokok	:	0810432022
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Matematika Teoritis
Judul Skripsi	:	Karakteristik Solusi Kuadrat Terkecil

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 23 April 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,
1.

Nova Noliza Bakar, M. Si
NIP. 19631104 199203 2 002

2.

Dr. Susila Bahri
NIP. 19680303 199302 2 001

Penguji,
1.

Dr. Muhafzan
NIP. 19670602 199302 1 001

2.

Izzati Rahmi HG, M. Si
NIP. 19740928 199903 1 002

3.

Dr. Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670807 199309 1 001

Bismillaahirrahmaanirrahiim

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, maka apabila kamu telah selesai(dari segala urusan) kerjakanlah dengan sungguh-sungguh urusan yang lain, hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap"
(Al- Insyirah 6-8)

Alhamdulillaahirabbil'alamiinn....
Terima kasih ya Allah...
Atas kesabaran dan kekuatan yang telah Engkau anugerahkan ya Allah
Atas semua kasih sayang yang menuntun hamba ke jalanMU ya Allah
Ke jalan yang terbaik dariMu...

"Skripsi ini dipersembahkan buat semua
orang yang telah mengisi hari-hariQ..."

My Family
Mama n Papa (terima kasih atas support, kasih sayang, do'a dan semua pengob-anannya..), bg oby(ani kan ingek bg...!), etekQ(benar apa yg etk blg).

∀sahabat tercinta...

Autizers tercinta(makasi bwt hari2 yg qt lalui, suka duka brsama)...

∀∈ O'laplace...

∀∈ Himatika...

Uda2, uni2, n adek2 smw yg telah mengisi hri2 yg penuh warna, bisa trtawa br-sama, menjalani hri2 brsama...

Bwt se2orang yang jauh disana, makasi bwt supportnya selama ini, makasi saran n smwnya...

Makasi bwt "S@ – el" yg pernah jadi se2orang yg sangat berarti...
Bwt "jelekQ" makasi juga dah beri masukan2, do'anya, dukungannya, wlw terkadang dirimu menyebalkan, tapi tu bermakna bwt hari2Q...

Terima kasih smw, mgkin tanpa adanya kebersamaan ini
hidup ini akan terasa hampa.
Tak kan ada tawa canda, suka duka,
dan air mata bahagia itu...

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "Karakteristik Solusi Kuadrat Terkecil" yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang menebar ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibuk Nova Noliza Bakar, M. Si selaku Pembimbing I yang dengan sabar mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini melalui bimbingan dan diskusi yang sangat bermanfaat. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama penulis menjalani perkuliahan.

2. Ibuk Dr. Susila Bahri selaku Pembimbing II yang membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.

3. Bapak Dr. Muhafzan, Ibu Izzati Rahmi HG, M. Si dan Bapak Dr. Admi Nazra selaku penguji skripsi yang telah memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Bapak Narwen, M. Si selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberi pengarahan, nasehat, motivasi dan ilmu selama penulis belajar di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

6. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membagi ilmunya kepada penulis dalam proses perkuliahan. Karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membantu selama penulis melaksanakan studi di Unand.

7. Ayahanda Wisrul dan Ibunda Marni yang teristimewa, serta kakak dan kedua adikku tersayang yang telah memberikan dorongan semangat, do'a, dan motivasi tiada henti.

8. Semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini, terutama teman-teman angkatan 2008, senior-senior dan adik-adik angkatan 2009, 2010, dan 2011 di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

Penulis selalu terbuka terhadap sumbangan pemikiran baik kritik maupun saran yang membangun untuk menyempurnakan skripsi ini. Penulis sangat menyadari

bahwa dalam skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari kekurangan karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang penulis miliki. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan melalui e-mail di chelcutes@yahoo.com.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya. Amin.

Padang, April 2012

Refni Machelina.

ABSTRAK

Sistem persamaan linier $Ax = b$ dengan A matriks $m \times n$ dimana $m > n$ dikatakan overdetermined system. Dalam tulisan ini dikaji karakteristik solusi kuadrat terkecil pada overdetermined system untuk memperoleh solusi aproksimasi pada inconsistent system.

Solusi kuadrat terkecil memenuhi $A^T(b - Ax) = 0$, persamaan normal, bersifat tunggal jika $\text{rank}(A) = n$, dan jika $\text{rank}(A) < n$ maka himpunan semua solusi kuadrat terkecilnya yaitu $S = \{x = \hat{x} + z | z \in N(A)\}$ dengan $N(A)$ adalah ruang null dari A.

Kata kunci : sistem persamaan linier, overdetermined system, inconsistent system, persamaan normal, rank, ruang null.

DAFTAR ISI

ABSTRAK vii

DAFTAR ISI viii

DAFTAR GAMBAR x

I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Pembatasan Masalah 2

1.4 Tujuan 2

1.5 Sistematika Penulisan 2

II LANDASAN TEORI 4

2.1 Sistem Persamaan Linier 4

2.2 Teori Matriks 5

2.3 Vektor, Ruang Vektor, dan Subruang 7

2.4 Hasil Kali Dalam, Norm dan Norm Euclidean 10

2.5 Transformasi Linier dari R^n ke R^m 11

2.6 Subruang Ortogonal 14

2.7 Proyeksi Ortogonal 15

III PEMBAHASAN 18

3.1 Karakteristik Solusi Kuadrat Terkecil 18

3.2 Proyeksi Ortogonal pada Masalah Kuadrat Terkecil 26

IV PENUTUP 33

4.1 Kesimpulan 33

4.2 Saran 34

DAFTAR PUSTAKA 35

DAFTAR GAMBAR

2.5.1 Operator Proyeksi 13

2.7.2 Proyeksi Ortogonal u pada W 15

2.7.3 $u - w$ diminimalkan oleh $w = \text{proj}_W u$ 16

3.1.1 Interpretasi Geometri dari Sifat Kuadrat Terkecil 25

3.2.2 Proyeksi Ortogonal b pada S 27

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sistem persamaan linier merupakan teori dasar dalam aljabar linier. Sistem persamaan linier dikatakan konsisten (consistent system) jika sistem tersebut mempunyai solusi, sedangkan sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi dikatakan tak konsisten (inconsistent system).

Dalam kehidupan nyata sering muncul kasus dimana beberapa permasalahan fisika menghasilkan sebuah sistem persamaan linier $Ax = b$, yang seharusnya konsisten dalam tataran teoritis namun menjadi tidak demikian karena adanya kesalahan-kesalahan pengukuran pada entri-entri A dan b yang menyebabkan sistem menjadi tak konsisten. Sistem yang tak konsisten dapat dicari solusi aproksimasinya dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Misalkan diberikan sistem persamaan linier dalam bentuk $Ax = b$ yang tak konsisten, dengan $b \in R^m$ dan $A \in R^{m\times n}$. Akan dicari vektor $x \in R^n$ sehingga Ax adalah pendekatan terbaik untuk b. Banyak cara yang mungkin dapat digunakan untuk menentukan solusi terbaik, salah satu caranya yaitu dengan memisalkan x menjadi sebuah solusi untuk masalah minimisasi:

$$\min_x \ Ax - b\ _2, \quad A \in R^{m\times n}, \quad b \in R^m \tag{1.1.1}$$

dimana $\|\cdot\|_2$ merupakan norm vektor Euclidean. Persamaan (1.1.1) disebut dengan masalah kuadrat terkecil linier, x merupakan solusi kuadrat terkecil dari sistem $Ax = b$, dan $b - Ax = r$ disebut vektor residu.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang akan diangkat adalah bagaimana karakteristik solusi dari sistem persamaan linier yang diselesaikan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan hanya dibatasi pada solusi dan karakteristik solusi dari sistem persamaan linier untuk overdetermined system dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

1.4 Tujuan

Adapun yang menjadi tujuan dari penulisan adalah untuk mengetahui karakteristik dari solusi kuadrat terkecil pada overdetermined system.

1.5 Sistematika Penulisan

Dalam tulisan ini, akan dibagi atas 4 Bab, yaitu Bab I Pendahuluan, yang berisi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan

sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, berisi: materi dasar dan m ateri pe-

nunjang. Bab III Pembahasan tentang karakteristik solusi dari sistem per samaan

linier pada overdetermined system dengan menggunakan metode kuadra t terkecil.

Bab 4 Penutup, berisi: kesimpulan dan saran.