PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF $nP_2 \cup P_n$ DAN GRAF $nP_2 \cup P_{n+2}$

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh:

NURUL MUSTIKA SIREGAR

06134005

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2012

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Segala puji bagi Allah, Tuhan pencipta alam semesta yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan kekuatan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul **"PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF $\boldsymbol{nP_2 \cup P_n}$ DAN GRAF $\boldsymbol{nP_2 \cup P_{n+2}}$''**, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas. Selanjutnya tidak lupa shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Terima kasih yang sedalam-dalamnya penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan, dan motivasi selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu **Nova Noliza Bakar, M.Si**, Ibu **Dr. Lyra Yulianti** dan Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku penguji yang telah membaca, memberikan kritik dan saran pada seminar tugas akhir dan ujian sarjana.
3. Bapak **Drs. Bukti Ginting** selaku penasehat akademik.
4. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan bekal ilmu yang sangat bermanfaat.

5. Keluarga tercinta yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.
6. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006, yang telah banyak menyumbangkan tenaga, inspirasi, dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat-Nya kepada mereka sebagai balasan atas semua kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Pelabelan total sisi-ajaib (*edge-magic total labelings*) pada suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dengan orde $|V(G)| = p$ dan ukuran $|E(G)| = q$ adalah fungsi bijektif $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk sebarang sisi xy di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$ untuk suatu konstanta k. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada graf G. Pelabelan total sisi-ajaib yang memetakan himpunan titik suatu graf ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ disebut pelabelan sisi-ajaib super (*super edge-magic labeling*). Dalam tugas akhir ini, akan ditunjukkan bahwa graf $nP_2 \cup P_n$ dan graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ adalah graf dengan pelabelan total sisi-ajaib, super dengan mengkonstruksi pelabelan titik dan sisinya, sehingga didapatkan suatu konstanta ajaib k.

Kata kunci : *graf lintasan, konstanta ajaib, pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total sisi-ajaib super.*

ABSTRACT

An edge-magic total labeling on a graph $G = \big(V(G), E(G)\big)$ with order $|V(G)| = p$ and size $|E(G)| = q$ is a bijection function $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ with the properties that, for each edge xy of G, $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, where k is a constant. Then k is called magic constant f graph G. An edge-magic total labeling with a function $\lambda : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$ is called super edge-magic total labeling. In this thesis we will show that the graph $nP_2 \cup P_n$ and graph $nP_2 \cup P_{n+2}$ is super edge-magic total labeling, with constructed vertex labeling and edge labeling until get a magic constant k.

Key words: *path, magic constant, edge-magic total labeling, super edge-magic total labeling*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah ilmu yang berkembang dengan sangat pesat didalam matematika dan ilmu komputer. Salah satu masalah utama dalam teori graf adalah bagaimana cara memberikan label atau menandai suatu titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*, sedemikian sehingga setiap titik dan sisi yang saling bertetangga *(adjacent)* memiliki tanda yang berbeda.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan manfaatnya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik. Pelabelan pada graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan positif. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *graceful*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super. Beberapa kajian mengenai pelabelan total sisi-ajaib super antara lain Abdussakir (2005) yang mengkaji tentang pelabelan total sisi-ajaib super pada graf mP_2 (untuk m bilangan asli ganjil), serta E.T. Baskoro (2003) yang mengkaji tentang pelabelan total sisi-ajaib super pada graf nP_3. Dapat dilihat bahwa untuk graf $nP_2 \cup P_n$ dan graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ merupakan permasalahan yang sangat menarik untuk dikaji.

1.2 Perumusan Masalah

Misalkan diberikan gabungan dua graf lintasan yaitu graf $nP_2 \cup P_n$ dan graf $nP_2 \cup P_{n+2}$. Maka masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah apakah graf $nP_2 \cup P_n$ dan graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ merupakan graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini permasalahan dibatasi untuk menentukan pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $nP_2 \cup P_n$ untuk $n \geq 2$ dengan konstanta ajaib $k = 7n + 1$ dan graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ untuk $n \geq 1$ dengan konstanta ajaib $k = 7n + 6$.

1.4 Tujuan Penulisan

Tulisan ini bertujuan untuk mengkaji pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $nP_2 \cup P_n$ untuk $n \geq 2$ dengan konstanta ajaib $k = 7n + 1$ dan pada graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ untuk $n \geq 1$ dengan konstanta ajaib $k = 7n + 6$.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab yaitu pada bab I, diuraikan tentang latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Bab II berisikan definisi dan terminologi dalam graf, serta lema pendukung. Hasil utama dari penulisan tugas akhir ini dibahas pada bab III. Sedangkan bab IV adalah penutup, membahas mengenai kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar dan istilah dalam graf serta notasi-notasi yang digunakan pada bab-bab selanjutnya. Kajian diawali dengan pendefinisian graf, beberapa istilah dalam graf, beberapa jenis graf, defenisi dan beberapa jenis pelabelan graf.

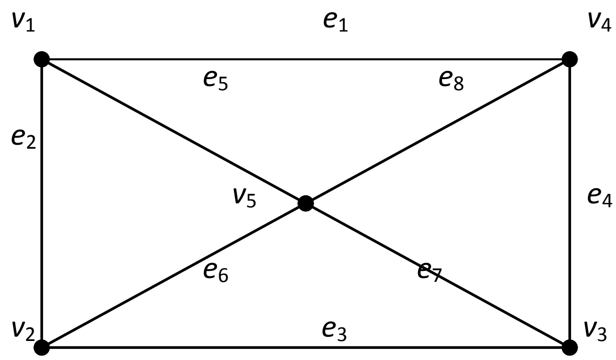
2.1 Graf

2.1.1 Definisi dan Terminologi Graf

Definisi 2.1.1.1 [3] :

Graf G adalah pasangan $G = (V(G), E(G))$ dengan $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, dimana V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi.

Banyak titik yang ada pada graf G adalah $|V(G)| = p$, dan disebut **orde** (*order*) dari G, sedangkan banyak sisi pada graf G adalah $|E(G)| = q$, dan disebut **ukuran** (*size*) dari G. Gambar 1 menunjukkan sebuah graf, misalkan graf G mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Sehingga $p = 5$ dan $q = 8$.



Gambar 1. Graf G

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut **lingkungan** dari v dan dinotasikan dengan N_v. **Derajat** dari titik v di graf G, disingkat menjadi $\deg(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$ maka dapat dituliskan $\deg(v) = |N(v)|$.

Jalan *(walk)* $u - v$ dalam graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling antara titik dan sisi, $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ adalah sisi di G, v_0 disebut **titik awal** *(initial vertex)*, v_n disebut **titik akhir** *(terminal vertex)*, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut **titik internal**, dan n menyatakan panjang dari W.

Jika $v_0 \neq v_n$ maka W disebut **jalan terbuka**. Jika $v_0 = v_n$ maka W disebut **jalan tertutup.** Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut **lintasan** *(path)*.

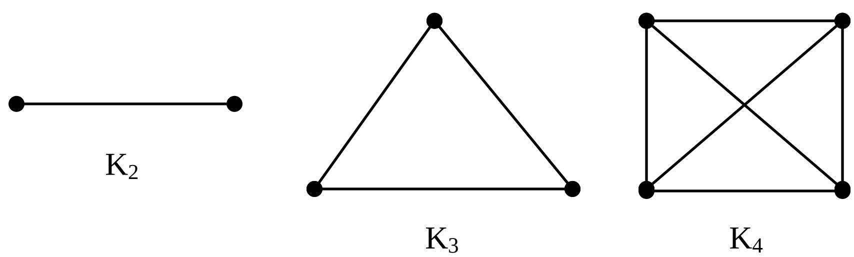
2.1.2 Jenis-Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus yang sering ditemukan pada pembahasan mengenai teori graf. Berikut adalah definisi dari beberapa graf sederhana khusus.

1. Graf lengkap *(Complete graph)*

   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya **[5].** Graf lengkap berorde n dinotasikan dengan $\mathbf{K_n}$. Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.

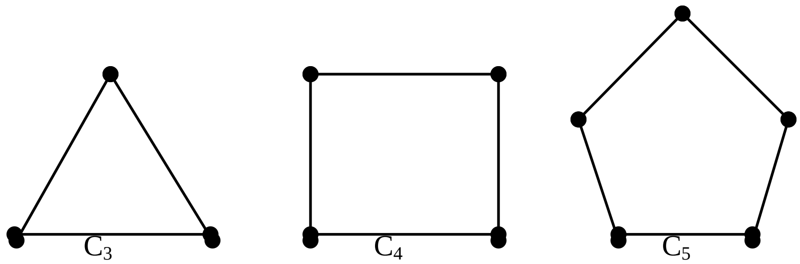
   Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2. Beberapa Graf Lengkap

2. Graf siklus *(Cycle graph)*

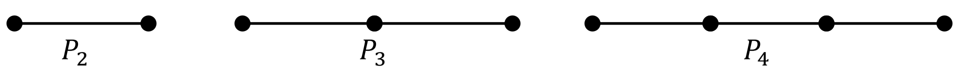
   Graf siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama **[5]**. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan $\mathbf{C_n}$, dengan $n \geq 3$



Gambar 3. Beberapa Graf Lingkaran

3. Graf lintasan *(Path)*

Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n didalam graf *G* ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = v_0 v_1,\ e_2 = v_1 v_2, \ldots,\ e_n = v_{n-1} v_n$ adalah sisi-sisi dari graf *G* **[5]**. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan $\boldsymbol{P_n}$. Lintasan merupakan graf terhubung sederhana dengan dua titik berderajat satu, yang disebut ujung dari lintasan, dan $n - 2$ titik berderajat dua. Dengan kata lain, graf lintasan $P_n = (V, E)$, dimana $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n\}$. Graf lintasan P_n memiliki $n - 1$ sisi.



Gambar 4. Beberapa Graf Lintasan

2.2 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan (fungsi) bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif **[2]**. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*) **[4]**.

Ide pelabelan graf diperumum dari ide **persegi ajaib (*magic square*).** Persegi ajaib (*magic square*) berorde n adalah susunan dari n^2 bilangan, biasanya bilangan bulat, dimana jumlah bilangan disetiap baris, kolom, dan diagonal-diagonalnya adalah sama, dan disebut konstanta ajaib **[2]**. Berikut ini beberapa jenis pelabelan ajaib pada suatu graf :

a. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Banyaknya titik di G adalah $|V(G)| = p$, dan banyaknya sisi di G adalah $|E(G)| = q$. **Pelabelan titik sisi ajaib** (*edge-magic vertex labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif $\lambda_1 : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$ sehingga untuk sebarang sisi xy di G berlaku

$$\lambda_1(x) + \lambda_1(y) = k$$

untuk suatu konstanta k, k bilangan bulat. Selanjutnya k disebut **bilangan ajaib** pada G dan G disebut **titik sisi ajaib [4]**.

b. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Banyaknya titik di G adalah $|V(G)| = p$ dan banyak sisi di G adalah $|E(G)| = q$. **Pelabelan total titik ajaib** (*vertex-magic total labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif $\lambda_2 : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sehingga untuk sebarang titik x di G dan y di $N(x)$ di berlaku

$$\lambda_2(x) + \sum_{y \epsilon N(x)} \lambda_2(xy) = k$$

untuk suatu konstanta k, k bilangan bulat. Selanjutnya k disebut **bilangan ajaib** pada G dan G disebut **total titik ajaib [4]**.

c. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Banyaknya titik di G adalah $|V(G)| = p$ dan banyak sisi di G adalah $|E(G)| = q$. **Pelabelan sisi titik ajaib** (*vertex-magic edge labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif $\lambda_3 : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q\}$ sehingga untuk sebarang titik x di G dan y di $N(x)$ berlaku

$$\sum_{y \in N(x)} \lambda_3(xy) = k$$

untuk suatu konstanta k, k bilangan bulat. Selanjutnya k disebut **bilangan ajaib** pada G dan G disebut **sisi titik ajaib [4]**.

2.2.1 Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super

Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dengan banyaknya titik di G adalah $|V(G)| = p$ dan banyak sisi di G adalah $|E(G)| = q$.

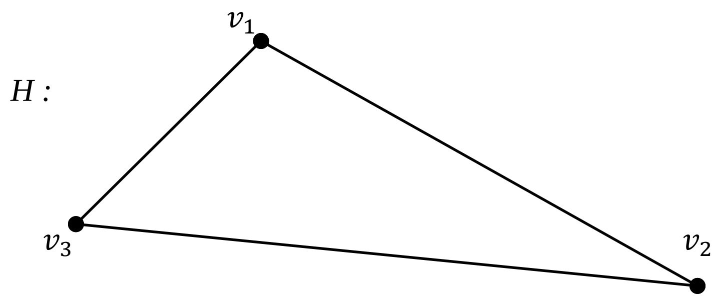
Definisi 2.2.1.1 : [1]

Pelabelan total sisi ajaib (edge-magic total labeling) pada graf G adalah fungsi bijektif $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk sebarang sisi xy di G berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k. Selanjutnya k disebut bilangan ajaib(konstanta ajaib) pada graf G dan G yang mempunyai sifat diatas disebut total sisi ajaib.

Sebagai contoh, perhatikan graf H berikut dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$. Diperoleh orde H adalah $p = 3$ dan ukuran H adalah $q = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graf H adalah total sisi ajaib.



Gambar 5. Graf H

Dikonstruksikan pelabelan $\lambda : V(H) \cup E(H) \to \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ sebagai berikut :

$\lambda(v_1) = 1,$

$\lambda(v_2) = 2,$

$\lambda(v_3) = 3,$

$\lambda(v_1v_2) = 6,$

$\lambda(v_2v_3) = 4,$

$\lambda(v_1v_3) = 5,$

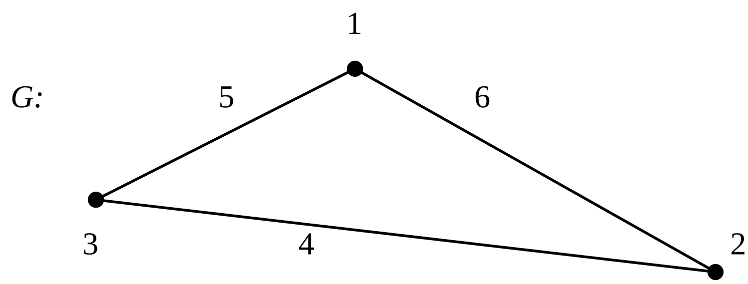
diperoleh :

$$\lambda(v_1) + \lambda(v_1v_2) + \lambda(v_2) = 1 + 6 + 2 = 9,$$

$$\lambda(v_1) + \lambda(v_1v_3) + \lambda(v_3) = 1 + 5 + 3 = 9,$$

$$\lambda(v_2) + \lambda(v_2v_3) + \lambda(v_3) = 2 + 4 + 3 = 9.$$

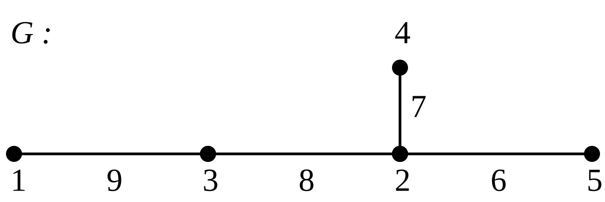
Diperoleh bahwa λ adalah pelabelan total sisi ajaib pada H, dengan konstanta ajaib $k = 9$. Maka diperoleh pelabelan total sisi ajaib pada H dapat digambarkan sebagai berikut



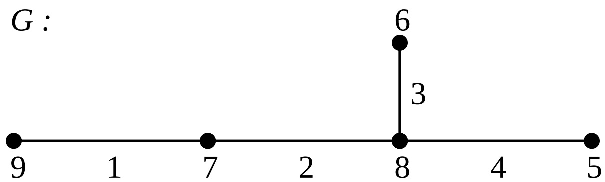
Gambar 6. Pelabelan total sisi-ajaib pada graf *H*

Pelabelan total sisi-ajaib yang memetakan himpunan titik suatu graf ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$ disebut **pelabelan sisi-ajaib super (*super edge magic labeling*).** Dengan demikian, pelabelan sisi-ajaib super adalah suatu bentuk khusus dari **pelabelan total sisi-ajaib**. Setiap pelabelan sisi-ajaib super pasti pelabelan total sisi-ajaib, tetapi tidak sebaliknya. Graf yang dapat dikenai pelabelan sisi-ajaib super disebut **graf sisi-ajaib super [1]**.

Perhatikan graf *G* berikut :



Gambar 7. Pelabelan total sisi-ajaib super



Gambar 8. Pelabelan total sisi-ajaib

Gambar 7 dan Gambar 8 di atas merupakan gambar graf G dengan pelabelan total sisi-ajaib. Meskipun demikian, pelabelan pada Gambar 7 disebut pelabelan sisi-ajaib super, sedangkan pada Gambar 8 bukan pelabelan sisi-ajaib super. Hal ini karena pada Gambar 7 himpunan titik dipetakan ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sedangkan pada Gambar 8, himpunan label titiknya bukan ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

BAB III

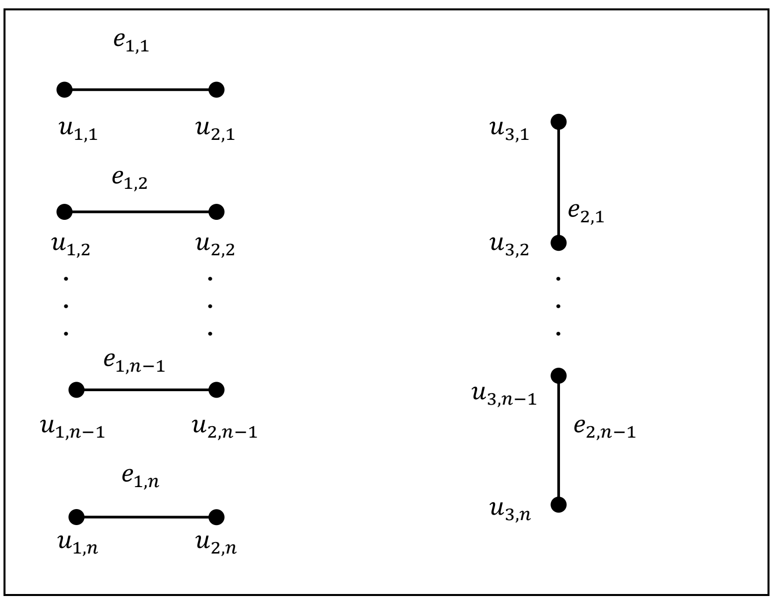
PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF $nP_2 \cup P_n$ DAN GRAF $nP_2 \cup P_{n+2}$

Pada bab ini akan dijelaskan hasil utama dari kajian skripsi, yaitu pelabelan total sisi-ajaib super (*super edge-magic total labelings*) pada graf $nP_2 \cup P_n$ untuk $n \geq 2$, dan $nP_2 \cup P_{n+2}$ untuk $n \geq 1$.

3.1 Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf $nP_2 \cup P_n$ untuk $n \geq 2$ dengan $k = 7n + 1$

Pada teorema berikut akan dibuktikan bahwa graf $nP_2 \cup P_n$ untuk $n \geq 2$ adalah graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super dengan $k = 7n + 1$.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 9. Graf $F_1 = nP_2 \cup P_n$

Teorema 3.1.1 [6] :

Untuk setiap $n \geq 2$*, graf* $nP_2 \cup P_n$ *merupakan graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib* $k = 7n + 1$.

Bukti :

Notasikan:

$\boldsymbol{V(nP_2 \cup P_n) = \{u_{1,i}, u_{2,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{3,j} | 1 \leq j \leq n\}}$ dan

$\boldsymbol{E(nP_2 \cup P_n) = \{e_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_{2,j} | 1 \leq j \leq n-1\}}$

dimana, $\boldsymbol{e_{1,i} = u_{1,i}\, u_{2,i}}$ untuk $\boldsymbol{1 \leq i \leq n}$ dan $\boldsymbol{e_{2,j} = u_{3,j}\, u_{3,j+1}}$ untuk $\boldsymbol{1 \leq j \leq n-1}$.

Konstruksikan pelabelan titik dan sisi pada graf $nP_2 \cup P_n$, $\lambda(\, V(nP_2 \cup P_n) \cup E(nP_2 \cup P_n))$ berdasarkan cara berikut.

Himpunan titik $V(nP_2 \cup P_n)$ diberi label sebagai berikut.

$$\lambda(u_{1,i}) = i, untuk\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda(u_{2,i}) = 2n + i, untuk\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda(u_{3,j}) = n + j, untuk\ 1 \leq j \leq n.$$

Semantara himpunan sisi $E(nP_2 \cup P_n)$ diberi label sebagai berikut.

$$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) = 5n - 2i + 1, untuk\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) = 5n - 2j, untuk\ 1 \leq j \leq n - 1.$$

Dari Definisi 2.2.1.1, diperoleh bahwa untuk $1 \leq i \leq n$ berlaku :

$$k = \lambda(u_{1,i}) + \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) + \lambda(u_{2,i}).$$

Sehingga dapat ditunjukkan k sebagai berikut.

$$k = (i) + (5n - 2i + 1) + (2n + i),$$

$$= i + i - 2i + 5n + 2n + 1,$$

$$= 7n + 1.$$

Maka untuk setiap $1 \leq i \leq n$, $\lambda(u_{1,i}) + \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) + \lambda(u_{2,i}) = 7n + 1$.

Dari definisi 2.2.1.1 diperoleh bahwa untuk $1 \leq j \leq n - 1$ berlaku :

$$k = \lambda(u_{3,j}) + \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) + \lambda(u_{3,j+1}).$$

Sehingga dapat ditentukan k sebagai berikut.

$$k = (n + n - 1) + (5n - 2(n - 1)) + (n + (n - 1) + 1),$$

$$= (2n - 1) + (5n - 2n + 2) + (n + n),$$

$$= 2n + 5n - 2n + 2n - 1 + 2,$$

$$= 7n + 1.$$

Untuk setiap $1 \leq j \leq n - 1$, $\lambda(u_{3,j}) + \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) + \lambda(u_{3,j+1}) = 7n + 1$.

Dengan demikian λ merupakan pelabelan total sisi-ajaib super, dengan konstanta ajaib $k = 7n + 1$. ■

Contoh 1 :

Misalkan diberikan suatu graf $nP_2 \cup P_n$ dengan $n = 3$. Akan ditentukan apakah graf tersebut mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super.

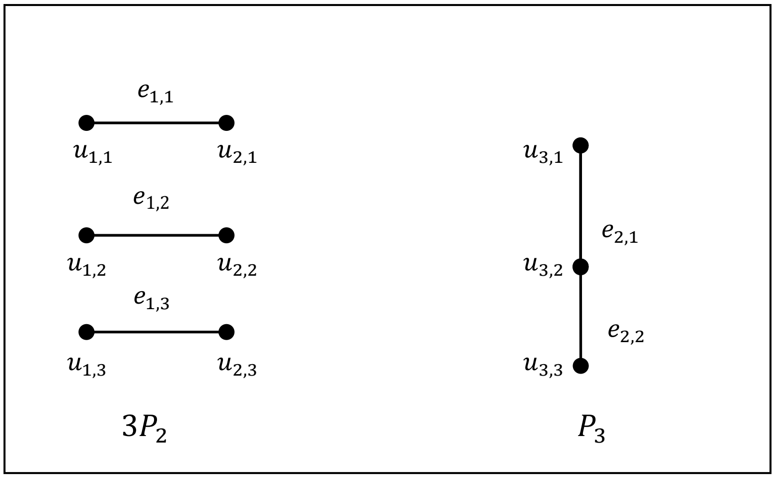
Jawab :

Untuk $n = 3$, dinotasikan

$V(3P_2 \cup P_3) = \{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, u_{1,3}, u_{2,3}\} \cup \{u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}\}$,

$E(3P_2 \cup P_3) = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}\}$.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 10. Graf $3P_2 \cup P_3$

Konstruksikan pelabelan titik $\lambda : V(3P_2 \cup P_3)$ sebagai berikut :

$$\lambda(u_{1,i}) = i\, ;\ 1 \leq i \leq 3,$$

$$\lambda(u_{2,i}) = 2n + i\, ;\ 1 \leq i \leq 3,$$

$$\lambda(u_{3,j}) = n + j\, ;\ 1 \leq j \leq 3,$$

sehingga diperoleh

$$\lambda(u_{1,1}) = 1,$$

$$\lambda(u_{1,2}) = 2,$$

$$\lambda(u_{1,3}) = 3,$$

$$\lambda(u_{2,1}) = (2)(3) + 1 = 7,$$

$$\lambda(u_{2,2}) = (2)(3) + 2 = 8,$$

$\lambda(u_{2,3}) = (2)(3) + 3 = 9,$

$\lambda(u_{3,1}) = 3 + 1 = 4,$

$\lambda(u_{3,2}) = 3 + 2 = 5,$

$\lambda(u_{3,3}) = 3 + 3 = 6.$

Selanjutnya dikonstruksikan pelabelan sisi $\lambda : E(3P_2 \cup P_3)$ sebagai barikut :

$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) = 5n - 2i + 1\ ;\ 1 \leq i \leq 3,$

$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) = 5n - 2j\ ;\ 1 \leq j \leq 2,$

sehingga diperoleh

$\lambda(e_{1,1}) = \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) = (5)(3) - (2)(1) + 1 = 15 - 2 + 1 = 14,$

$\lambda(e_{1,2}) = \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) = (5)(3) - (2)(2) + 1 = 15 - 4 + 1 = 12,$

$\lambda(e_{1,3}) = \lambda(u_{1,3}u_{2,3}) = (5)(3) - (2)(3) + 1 = 15 - 6 + 1 = 10,$

$\lambda(e_{2,1}) = \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) = (5)(3) - (2)(1) = 15 - 2 = 13,$

$\lambda(e_{2,2}) = \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) = (5)(3) - (2)(2) = 15 - 4 = 11.$

Sehingga konstanta ajaib untuk graf $3P_2 \cup P_3$ adalah

untuk setiap $1 \leq i \leq 3$, maka diperoleh :

$\lambda(u_{1,1}) + \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) + \lambda(u_{2,1}) = 1 + 14 + 7 = 22,$

$\lambda(u_{1,2}) + \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) + \lambda(u_{2,2}) = 2 + 12 + 8 = 22,$

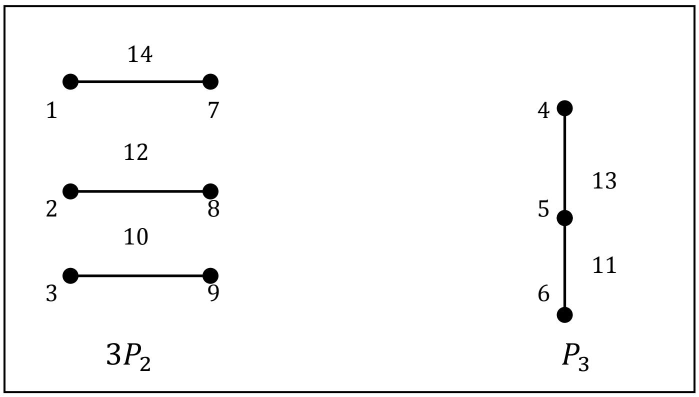
$\lambda(u_{1,3}) + \lambda(u_{1,3}u_{2,3}) + \lambda(u_{2,3}) = 3 + 10 + 9 = 22\ ,$

untuk setiap $1 \leq j \leq 2$, maka diperoleh :

$\lambda(u_{3,1}) + \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}) = 4 + 13 + 5 = 22,$

$$\lambda(u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}) = 5 + 11 + 6 = 22,$$

Dari Teorema 3.1.1 diperoleh $k = 7n + 1 = (7)(3) + 1 = 22$. Maka pelabelan pada graf $3P_2 \cup P_3$ merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 22$ .Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $3P_2 \cup P_3$ dapat diperlihatkan dengan gambar berikut :



Gambar 11. Pelabelan total sisi-ajaib super pada Graf $3P_2 \cup P_3$

Contoh 2 :

Misalkan suatu graf $nP_2 \cup P_n$ dengan $n = 4$. Akan ditentukan apakah graf tersebut mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super.

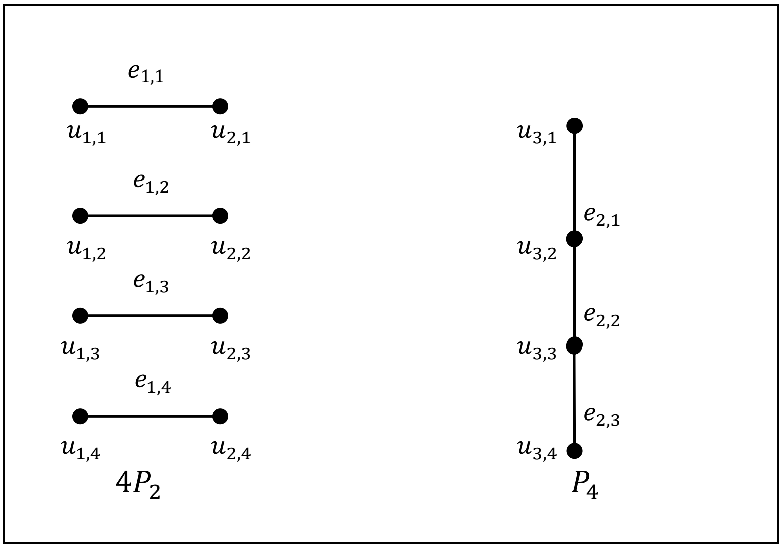
Jawab :

Untuk $n = 4$, dinotasikan

$V(4P_2 \cup P_4) = \{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, u_{1,3}, u_{2,3}, u_{1,4}, u_{2,4}\} \cup \{u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}, u_{3,4}\}$,

$E(4P_2 \cup P_4) = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{1,4}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}\}$.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 12. Graf $4P_2 \cup P_4$

Konstruksikan pelabelan titik $\lambda : V(4P_2 \cup P_4)$ sebagai berikut :

$$\lambda(u_{1,i}) = i\,;\ 1 \leq i \leq 4,$$

$$\lambda(u_{2,i}) = 2n + i\,;\ 1 \leq i \leq 4,$$

$$\lambda(u_{3,j}) = n + j\,;\ 1 \leq j \leq 4,$$

sehingga diperoleh :

$$\lambda(u_{1,1}) = 1,$$

$$\lambda(u_{1,2}) = 2,$$

$$\lambda(u_{1,3}) = 3,$$

$$\lambda(u_{1,4}) = 4,$$

$$\lambda(u_{2,1}) = (2)(4) + 1 = 9,$$

$$\lambda(u_{2,2}) = (2)(4) + 2 = 10,$$

$$\lambda(u_{2,3}) = (2)(4) + 3 = 11,$$

$\lambda(u_{2,4}) = (2)(4) + 4 = 12,$

$\lambda(u_{3,1}) = 4 + 1 = 5,$

$\lambda(u_{3,2}) = 4 + 2 = 6,$

$\lambda(u_{3,3}) = 4 + 3 = 7,$

$\lambda(u_{3,4}) = 4 + 4 = 8.$

Selanjutnya dikonstruksikan pelabelan sisi $\lambda : E(4P_2 \cup P_4)$ sebagai berikut :

$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) = 5n - 2i + 1 \,;\ 1 \leq i \leq 4,$

$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) = 5n - 2j \,;\ 1 \leq j \leq 3,$

sehingga diperoleh

$\lambda(e_{1,1}) = \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) = (5)(4) - (2)(1) + 1 = 20 - 2 + 1 = 19,$

$\lambda(e_{1,2}) = \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) = (5)(4) - (2)(2) + 1 = 20 - 4 + 1 = 17,$

$\lambda(e_{1,3}) = \lambda(u_{1,3}u_{2,3}) = (5)(4) - (2)(3) + 1 = 20 - 6 + 1 = 15,$

$\lambda(e_{1,4}) = \lambda(u_{1,4}u_{2,4}) = (5)(4) - (2)(4) + 1 = 20 - 8 + 1 = 13,$

$\lambda(e_{2,1}) = \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) = (5)(4) - (2)(1) = 20 - 2 = 18,$

$\lambda(e_{2,2}) = \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) = (5)(4) - (2)(2) = 20 - 4 = 16,$

$\lambda(e_{2,3}) = \lambda(u_{3,3}u_{3,4}) = (5)(4) - (2)(3) = 20 - 4 = 14.$

Sehingga konstanta ajaib untuk graf $4P_2 \cup P_4$ adalah

untuk setiap $1 \leq i \leq 4$, maka diperoleh :

$\lambda(u_{1,i}) + \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) + \lambda(u_{2,i}) = 1 + 19 + 9 = 29,$

$\lambda(u_{1,2}) + \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) + \lambda(u_{2,2}) = 2 + 17 + 10 = 29,$

$\lambda(u_{1,3}) + \lambda(u_{1,3}u_{2,3}) + \lambda(u_{2,3}) = 3 + 15 + 11 = 29,$

$$\lambda(u_{1,4}) + \lambda(u_{1,4}u_{2,4}) + \lambda(u_{2,4}) = 4 + 13 + 12 = 29,$$

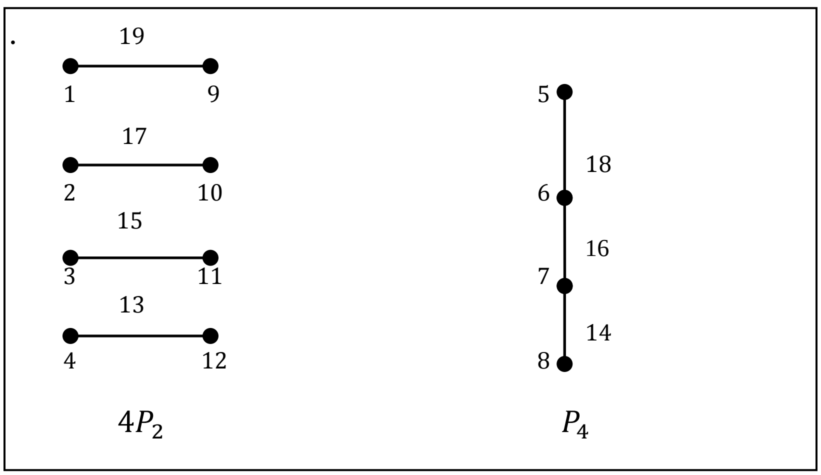
untuk setiap $1 \leq j \leq 3$, maka diperoleh :

$$\lambda(u_{3,1}) + \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}) = 5 + 18 + 6 = 29,$$

$$\lambda(u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}) = 6 + 16 + 7 = 29,$$

$$\lambda(u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}u_{3,4}) + \lambda(u_{3,4}) = 7 + 14 + 8 = 29.$$

Dari Teorema 3.1.1 diperoleh $k = 7n + 1 = (7)(4) + 1 = 29$. Maka pelabelan pada graf $4P_2 \cup P_4$ merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 29$. Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $4P_2 \cup P_4$ dapat diperlihatkan dengan gambar berikut :

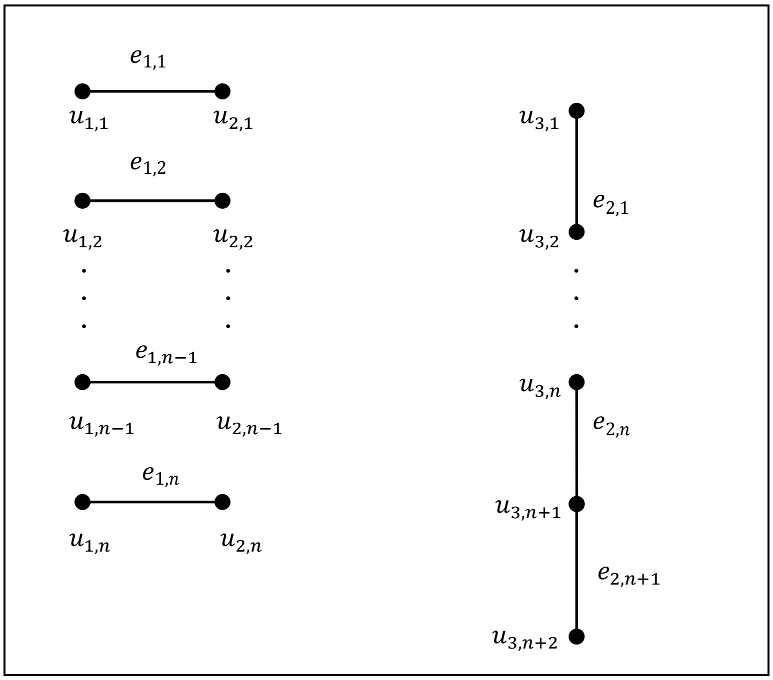


Gambar 13. Pelabelan total sisi-ajaib super pada Graf $4P_2 \cup P_4$

3.2 Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf $\boldsymbol{nP_2 \cup P_{n+2}}$ untuk $\boldsymbol{n \geq 1}$ dengan $\boldsymbol{k = 7n + 6}$

Akan dibuktikan bahwa graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ untuk $n \geq 1$ adalah graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super dengan $k = 7n + 6$.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 14. Graf $F_2 = nP_2 \cup P_{n+2}$

Teorema 3.2.1 [6] :

Untuk setiap $n \geq 1$, *graf* $nP_2 \cup P_{n+2}$ *merupakan graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib* $k = 7n + 6$.

Bukti :

Notasikan :

$\boldsymbol{V(nP_2 \cup P_{n+2}) = \{u_{1,i}, u_{2,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{3,j} | 1 \leq j \leq n+2\}}$ dan

$\boldsymbol{E(nP_2 \cup P_{n+2}) = \{e_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_{2,j} | 1 \leq j \leq n+1\}}$

dimana, $\boldsymbol{e_{1,i} = u_{1,i}\, u_{2,i}}$ untuk $\boldsymbol{1 \leq i \leq n}$ dan $\boldsymbol{e_{2,j} = u_{3,j}\, u_{3,j+1}}$ untuk $\boldsymbol{1 \leq j \leq n+1}$.

Konstruksikan pelabelan titik dan sisi pada graf $nP_2 \cup P_{n+2}$, $\lambda : (V(nP_2 \cup P_{n+2}) \cup E(nP_2 \cup P_{n+2}))$ berdasarkan cara berikut.

Himpunan titik $V(nP_2 \cup P_{n+2})$ diberi label sebagai berikut.

$$\lambda(u_{1,i}) = i, untuk\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda(u_{2,i}) = 2n + i + 2, untuk\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda(u_{3,j}) = n + j, untuk\ 1 \leq j \leq n + 2.$$

Sementara himpunan sisi $E(nP_2 \cup P_{n+2})$ diberi label sebagai berikut.

$$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) = 5n - 2i + 4, untuk\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) = 5n - 2j + 5, untuk\ 1 \leq j \leq n + 1.$$

Dari Definisi 2.2.1.1, diperoleh bahwa untuk $1 \leq i \leq n$ berlaku :

$$k = \lambda(u_{1,i}) + \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) + \lambda(u_{2,i}).$$

Sehingga dapat ditentukan k sebagai berikut.

$$k = (i) + (5n - 2i + 4) + (2n + i + 2),$$

$$= i + i - 2i + 5n + 2n + 4 + 2,$$

$$= 7n + 6.$$

Maka untuk setiap $1 \leq i \leq n$, $\lambda(u_{1,i}) + \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) + \lambda(u_{2,i}) = 7n + 6$.

Dari definisi 2.2.1.1, diperoleh bahwa untuk $1 \leq j \leq n+1$ berlaku

$$k = \lambda(u_{3,j}) + \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) + \lambda(u_{3,j+1}).$$

Sehingga dapat ditentukan k sebagai berikut.

$$k = (n + n + 2) + (5n - 2(n+2) + 5) + (n + (n+2) + 1),$$

$$= (2n + 2) + (5n - 2n - 4 + 5) + (2n + 3),$$

$$= 2n + 3n + 2n + 2 + 1 + 3,$$

$$= 7n + 6.$$

Untuk setiap $1 \leq j \leq n+1$, $\lambda(u_{3,j}) + \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) + \lambda(u_{3,j+1}) = 7n + 6$.

Dengan demikian λ merupakan pelabelan total sisi-ajaib super, dengan konstanta ajaib $k = 7n + 6$. ■

Contoh 3 :

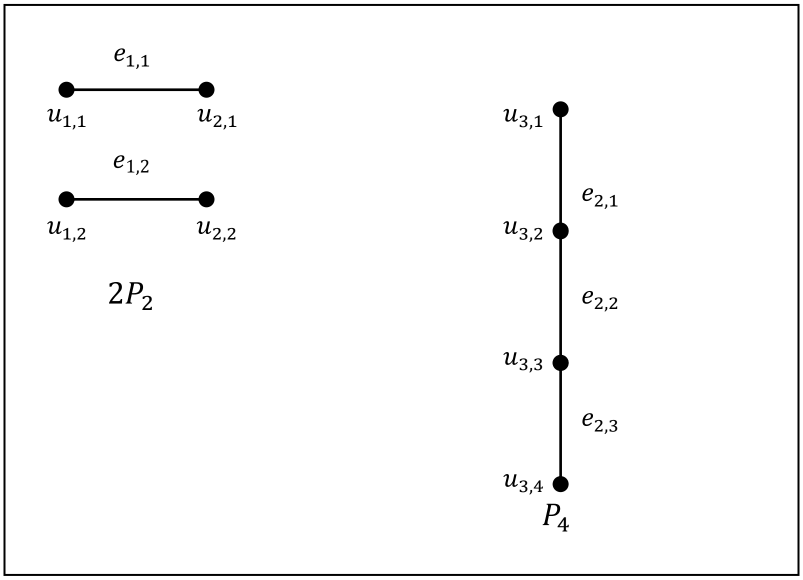
Misalkan suatu graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ dengan $n = 2$. Akan ditentukan apakah graf tersebut mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super.

Jawab :

Untuk $n = 2$, dinotasikan

$V(2P_2 \cup P_4) = \{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{2,2}\} \cup \{u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}, u_{3,4}\}$,

$E(2P_2 \cup P_4) = \{e_{1,1}, e_{1,2}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}\}$.



Gambar 15. Graf $2P_2 \cup P_4$

Konstruksikan pelabelan titik $\lambda : V(2P_2 \cup P_4)$ sebagai berikut.

$$\lambda(u_{1,i}) = i\ ;\ 1 \leq i \leq 2,$$

$$\lambda(u_{2,i}) = 2n + i + 2\ ;\ 1 \leq i \leq 2,$$

$$\lambda(u_{3,j}) = n + j\ ;\ 1 \leq j \leq 4,$$

sehingga diperoleh

$$\lambda(u_{1,1}) = 1,$$

$$\lambda(u_{1,2}) = 2,$$

$$\lambda(u_{2,1}) = (2)(2) + 1 + 2 = 7,$$

$$\lambda(u_{2,2}) = (2)(2) + 2 + 2 = 8,$$

$$\lambda(u_{3,1}) = 2 + 1 = 3,$$

$$\lambda(u_{3,2}) = 2 + 2 = 4,$$

$$\lambda(u_{3,3}) = 2 + 3 = 5,$$

$$\lambda(u_{3,4}) = 2 + 4 = 6.$$

Selanjutnya dikonstruksikan pelabelan sisi $\lambda : E(2P_2 \cup P_4)$ sebagai berikut.

$$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) = 5n - 2i + 4\ ;\ 1 \leq i \leq 2,$$

$$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) = 5n - 2j + 5\ ;\ 1 \leq j \leq 3.$$

sehingga diperoleh :

$$\lambda(e_{1,1}) = \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) = (5)(2) - (2)(1) + 4 = 10 - 2 + 4 = 12,$$

$$\lambda(e_{1,2}) = \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) = (5)(2) - (2)(2) + 4 = 10 - 4 + 4 = 10,$$

$$\lambda(e_{2,1}) = \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) = (5)(2) - (2)(1) + 5 = 10 - 2 + 5 = 13,$$

$$\lambda(e_{2,2}) = \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) = (5)(2) - (2)(2) + 5 = 10 - 4 + 5 = 11,$$

$$\lambda(e_{2,3}) = \lambda(u_{3,3}u_{3,4}) = (5)(2) - (2)(3) + 5 = 10 - 6 + 5 = 9.$$

Sehingga konstanta ajaib untuk graf $2P_2 \cup P_4$ adalah

untuk setiap $1 \leq i \leq 2$, maka diperoleh :

$$\lambda(u_{1,1}) + \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) + \lambda(u_{2,1}) = 1 + 12 + 7 = 20,$$

$$\lambda(u_{1,2}) + \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) + \lambda(u_{2,2}) = 2 + 10 + 8 = 20\ ,$$

untuk setiap $1 \leq j \leq 3$, maka diperoleh :

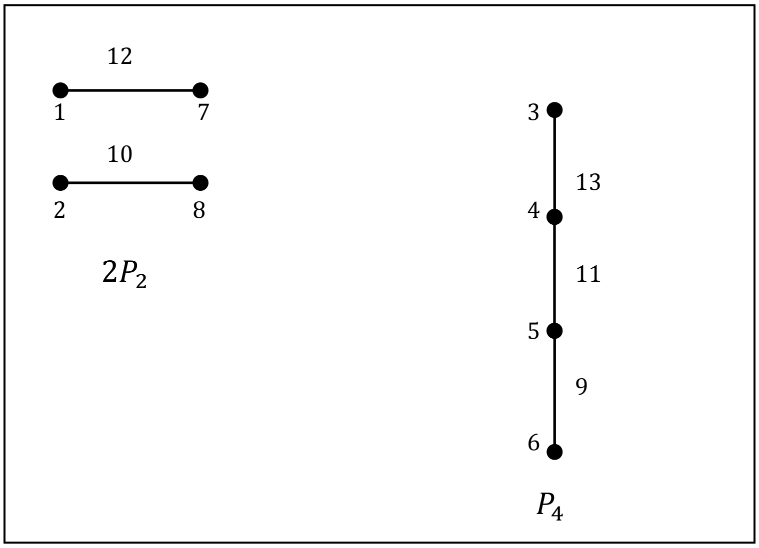
$$\lambda(u_{3,1}) + \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}) = 3 + 13 + 4 = 20,$$

$$\lambda(u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}) = 4 + 11 + 5 = 20,$$

$$\lambda(u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}u_{3,4}) + \lambda(u_{3,4}) = 5 + 9 + 6 = 20.$$

Dari Teorema 3.1.1 diperoleh $k = 7n + 6 = (7)(2) + 6 = 2.$ Maka pelabelan pada graf $2P_2 \cup P_4$ merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib

$k = 20$. Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $2P_2 \cup P_4$ dapat diperlihatkan dengan gambar berikut :



Gambar 16. Pelabelan total sisi-ajaib super pada Graf $2P_2 \cup P_4$

Contoh 4 :

Misalkan suatu graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ dengan $n = 3$. Akan ditentukan apakah graf tersebut mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super.

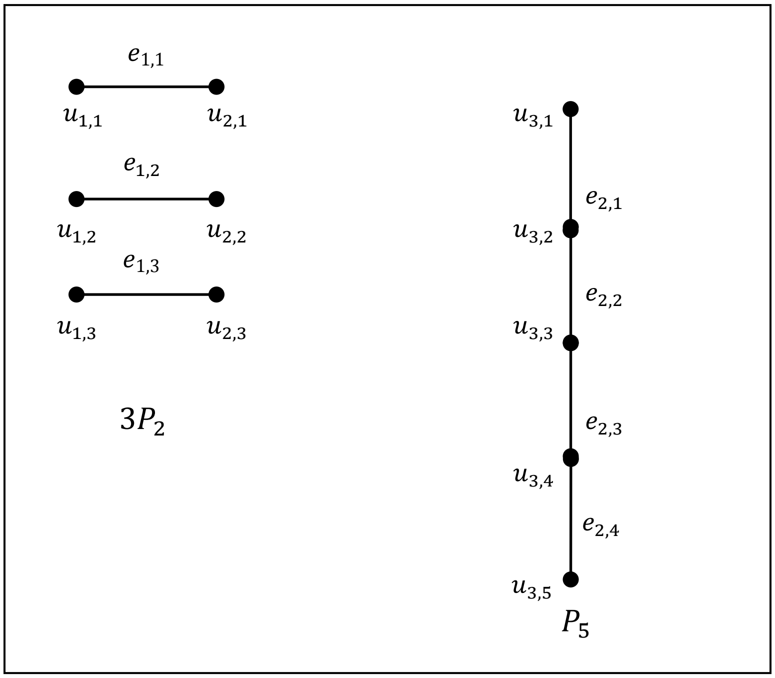
Jawab :

Untuk $n = 3$, dinotasikan :

$V(3P_2 \cup P_5) = \{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, u_{1,3}, u_{2,3}\} \cup \{u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}, u_{3,4}, u_{3,5}\}$,

$E(3P_2 \cup P_5) = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}, e_{2,4}\}$.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 17. Graf $3P_2 \cup P_5$

Konstruksikan pelabelan titik $\lambda : V(3P_2 \cup P_5)$ sebagai berikut :

$$\lambda(u_{1,i}) = i\,;\ 1 \le i \le 3,$$

$$\lambda(u_{2,i}) = 2n + i + 2\,;\ 1 \le i \le 3,$$

$$\lambda(u_{3,j}) = n + j, untuk\ 1 \le j \le 5,$$

sehingga diperoleh :

$$\lambda(u_{1,1}) = 1,$$

$$\lambda(u_{1,2}) = 2,$$

$$\lambda(u_{1,3}) = 3,$$

$$\lambda(u_{2,1}) = (2)(3) + 1 + 2 = 9,$$

$$\lambda(u_{2,2}) = (2)(3) + 2 + 2 = 10,$$

$$\lambda(u_{2,3}) = (2)(3) + 3 + 2 = 11,$$

$\lambda(u_{3,1}) = 3 + 1 = 4,$

$\lambda(u_{3,2}) = 3 + 2 = 5,$

$\lambda(u_{3,3}) = 3 + 3 = 6,$

$\lambda(u_{3,4}) = 3 + 4 = 7,$

$\lambda(u_{3,5}) = 3 + 5 = 8.$

Selanjutnya dikonstruksikan pelabelan sisi $\lambda : E(3P_2 \cup P_5)$ sebagai berikut :

$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}u_{2,i}) = 5n - 2i + 4\ ;\ 1 \leq i \leq 3,$

$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{3,j}u_{3,j+1}) = 5n - 2j + 5\ ;\ 1 \leq j \leq 4,$

sehingga diperoleh :

$\lambda(e_{1,1}) = \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) = (5)(3) - (2)(1) + 4 = 15 - 2 + 4 = 17,$

$\lambda(e_{1,2}) = \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) = (5)(3) - (2)(2) + 4 = 15 - 4 + 4 = 15,$

$\lambda(e_{1,3}) = \lambda(u_{1,3}u_{2,3}) = (5)(3) - (2)(3) + 4 = 15 - 6 + 4 = 13,$

$\lambda(e_{2,1}) = \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) = (5)(3) - (2)(1) + 5 = 15 - 2 + 5 = 18,$

$\lambda(e_{2,2}) = \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) = (5)(3) - (2)(2) + 5 = 15 - 4 + 5 = 16,$

$\lambda(e_{2,3}) = \lambda(u_{3,3}u_{3,4}) = (5)(3) - (2)(3) + 5 = 15 - 6 + 5 = 14,$

$\lambda(e_{2,4}) = \lambda(u_{3,4}u_{3,5}) = (5)(3) - (2)(4) + 5 = 15 - 8 + 5 = 12.$

Sehingga konstanta ajaib untuk graf $3P_2 \cup P_5$ adalah

untuk setiap $1 \leq i \leq 3$, maka diperoleh :

$\lambda(u_{1,1}) + \lambda(u_{1,1}u_{2,1}) + \lambda(u_{2,1}) = 1 + 17 + 9 = 27,$

$\lambda(u_{1,2}) + \lambda(u_{1,2}u_{2,2}) + \lambda(u_{2,2}) = 2 + 15 + 10 = 27,$

$\lambda(u_{1,3}) + \lambda(u_{1,3}u_{2,3}) + \lambda(u_{2,3}) = 3 + 13 + 11 = 27,$

untuk setiap $1 \leq j \leq 4$, maka diperoleh :

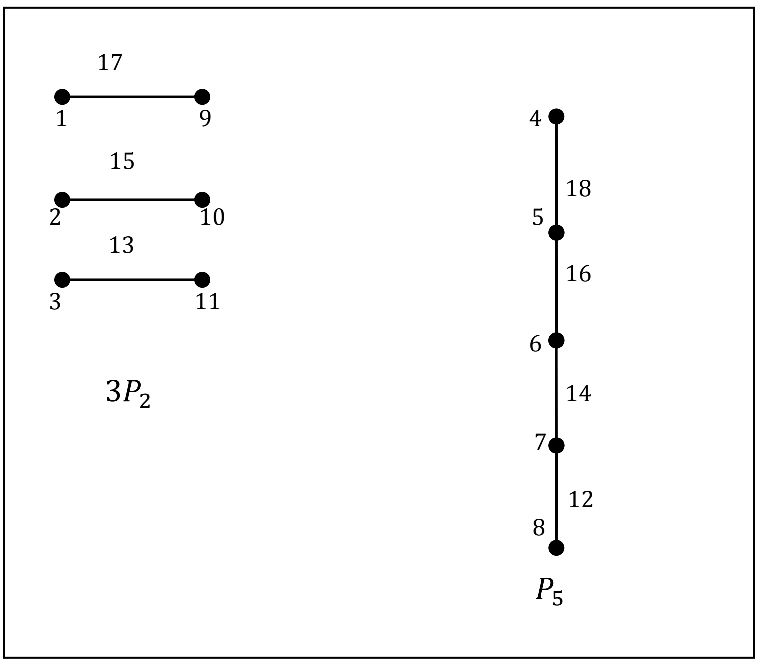
$$\lambda(u_{3,1}) + \lambda(u_{3,1}u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}) = 4 + 18 + 5 = 27,$$

$$\lambda(u_{3,2}) + \lambda(u_{3,2}u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}) = 5 + 16 + 6 = 27,$$

$$\lambda(u_{3,3}) + \lambda(u_{3,3}u_{3,4}) + \lambda(u_{3,4}) = 6 + 14 + 7 = 27,$$

$$\lambda(u_{3,4}) + \lambda(u_{3,4}u_{3,5}) + \lambda(u_{3,5}) = 7 + 12 + 8 = 27.$$

Dari Teorema 3.1.1 diperoleh $k = 7n + 6 = (7)(3) + 6 = 27$. Maka pelabelan pada graf $3P_2 \cup P_5$ merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 20$. Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $3P_2 \cup P_5$ dapat diperlihatkan dengan gambar berikut :



Gambar 18. Pelabelan total sisi-ajaib super pada Graf $3P_2 \cup P_5$

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa :

1. Graf $nP_2 \cup P_n$ untuk $n \geq 2$ dengan $V(nP_2 \cup P_n) = \{u_{1,i}, u_{2,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{3,j} | 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(nP_2 \cup P_n) = \{e_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_{2,j} | 1 \leq j \leq n-1\}$ merupakan graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super yang dipeoleh dari beberapa proses yaitu dengan melabelkan semua titik dan sisinya, sehingga didapatkan konstanta ajaib $k = 7n + 1$.
2. Graf $nP_2 \cup P_{n+2}$ untuk $n \geq 1$ dengan $V(nP_2 \cup P_{n+2}) = \{u_{1,i}, u_{2,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{3,j} | 1 \leq j \leq n+2\}$ dan $E(nP_2 \cup P_{n+2}) = \{e_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_{2,j} | 1 \leq j \leq n+1\}$ merupakan graf dengan pelabelan total sisi-ajaib super yang dipeoleh dari beberapa proses yaitu dengan melabelkan semua titik dan sisinya, sehingga didapatkan konstanta ajaib $k = 7n + 6$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir. *Edge-Magic Total Labeling pada Graph mP_2 (m bilangan asli ganjil)*. Jurnal Saintika, Edisi Khusus Dies Natalies I UIN Malang, Juni. (2005), 22-27.

[2] Baca, Martin dan Miller, Mirka. 2008. *Super Edge-Antimagic Graph : A Wealth of Problems and Solutions*. Brown Walker Press Boca Raton. Florida, USA.

[3] Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. Graph and Digraph 2nd Edition. California : Wadsworth. Inc

[4] Miller, Mirka. 2000.*Open Problems in Graph Theory : Labeling and Extremal Graph*. Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.

[5] Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit* Edisi ke 3. Informatika : Bandung.

[6] Sudarsana. I W, Baskoro E.T. Ismaimuza D. dan Assiyatun.H. *Creating new super edge-magic total labelings from old ones*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 55 (2005), 83-90.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama Nurul Mustika Siregar, dilahirkan di Padangsidimpuan pada tanggal 04 Oktober 1987, anak pertama dari lima bersaudara, buah hati dari pasangan Muslim Siregar dan Erna Sri Atika Harahap. Penulis menamatkan pendidikan dasar di SDN 26 Padangsidimpuan pada tahun 2000, kemudian melanjutkan ke SLTPN 4 Padangsidimpuan dan menamatkannya pada tahun 2003. Penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 4 Padangsidimpuan dan selesai pada tahun 2006. Di tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur PMDK.

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis ikut aktif dalam kegiatan dari Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA).