

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF HALIN $G(2, n)$,
UNTUK $n \geq 3$

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA



OLEH :

YUNIZAR

BP. 0910433062

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS

2013

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	iv
DAFTAR TABEL	vi
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Pembatasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf	4
2.2 Jenis - Jenis Graf	7
2.3 Pemetaan [5]	11
2.4 Pelabelan Graf	12
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF HALIN $G(2, n)$, UNTUK $n \geq 3$	14
3.1 Pelabelan graceful pada graf halin $G(2, n)$	15

PENUTUP	34
4.1 Kesimpulan34
4.2 Saran34
DAFTAR PUSTAKA	35

DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf G_1	5
2.2	(a) Graf tak terhubung (b) Graf terhubung	6
2.3	(a) Graf G , (b) Subgraf dari Graf G , (c) Subgraf yang diinduksi dari graf G	7
2.4	contoh Graf Lengkap	8
2.5	K_4 adalah Graf Planar	10
2.6	K_5 adalah bukan Graf Planar	10
2.7	Graf Halin	11
2.8	Contoh Graf Graceful	13
3.1	Graf Halin $G(4, 5)$	14
3.2	Graf Halin $G(2, n)$	15
3.3	Graf Halin $G(2, 5)$	18
3.4	Pelabelan titik pada $G(2, 5)$	19
3.5	Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 5)$	21
3.6	Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 5)$	21
3.7	Graf Halin $G(2, 7)$	22
3.8	Pelabelan titik pada $G(2, 7)$	23
3.9	Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 7)$	24
3.10	Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 7)$	25

3.11	Graf Halin $G(2, 6)$25
3.12	Pelabelan titik pada $G(2, 6)$26
3.13	Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 6)$28
3.14	Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 6)$29
3.15	Graf Halin $G(2, 8)$29
3.16	Pelabelan titik pada $G(2, 8)$31
3.17	Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 8)$32
3.18	Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 8)$33

DAFTAR TABEL

3.1	Pelabelan titik pada $G(2, 5)$19
3.2	Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 5)$20
3.3	Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 5)$20
3.4	Pelabelan titik pada $G(2, 7)$22
3.5	Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 7)$23
3.6	Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 7)$24
3.7	Pelabelan titik pada $G(2, 6)$26
3.8	Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 6)$27
3.9	Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 6)$28
3.10	Pelabelan titik pada $G(2, 8)$30
3.11	Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 8)$31
3.12	Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 8)$32

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 sebagai upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg. Pada tulisan tersebut Euler membahas masalah jembatan yang menghubungkan kota-kota di Königsberg dan Prussia yang terpisah oleh sungai. Teori ini lahir dari sebuah pertanyaan apakah bisa melewati ketujuh jembatan Königsberg dalam satu kali melintas sampai kembali ke tempat semula. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler mempersentasikan daratan yang dihubungkan jembatan dengan titik (vertex) dan jembatan dinyatakan dengan sisi (edge). Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf. Teori ini terus berkembang seiring ditemukannya berbagai aplikasi dalam menyelesaikan beberapa permasalahan.

Graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan untuk menggambarkan atau menyederhanakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti sehingga dapat diselesaikan. Hal ini memungkinkan ditemukannya hal-hal baru yang terkait dengan graf dan menjadi faktor utama mengapa teori graf berkembang sangat cepat.

Perkembangan teori graf menyangkut dua hal yaitu topik bahasan dan aplikasinya. Beberapa topik bahasan baru diantaranya yaitu pelabelan, Hamiltonian, dimensi partisi, dan operasi pada graf. Pelabelan graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas.

Pelabelan graf merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan bulat positif yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Suatu pelabelan f dari suatu graf $G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu dari himpunan titik di G ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, bobot yang diinduksi oleh f pada e ditulis $f(e)$, adalah $|f(u) - f(v)|$. Misalkan G adalah suatu graf berorder n dan size m . Jika $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ adalah suatu pelabelan dari G , sedemikian sehingga himpunan bobot yang diinduksi oleh f adalah $\{1, 2, \dots, m\}$, maka f dikatakan pelabelan graceful dari G , dan G dinamakan graf graceful.

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan graceful untuk jenis-jenis graf tertentu telah dibahas pada skripsi yang lain seperti pelabelan vertex-graceful pada graf-(5,6) dan graf-(6,7), pelabelan graceful pada graf superstar $S_{5,n}$, dan lain sebagainya. Penulis tertarik untuk melakukan penelitian pada jenis graf yang lain, yaitu pada graf halin $G(2, n)$. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul pada skripsi ini yaitu "pelabelan graceful pada graf halin $G(2, n)$, untuk $n \geq 3$."

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan pelabelan graceful pada graf halin $G(2, n)$, untuk $n \geq 3$.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini, permasalahan akan dibatasi pada Graf Halin $G(2, n)$, untuk $n \geq 3$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan pelabelan graceful pada graf halin $G(2, n)$, untuk $n \geq 3$.

1.5 Sistematika Penulisan

Dalam skripsi ini terdiri dari 4 bab. Pada Bab I diberikan pendahuluan yang didalamnya mencakup latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi yang mendasari hasil dan pembahasan pada skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Selanjutnya, kajian dari permasalahan tersebut akan dijelaskan pada Bab III dan penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

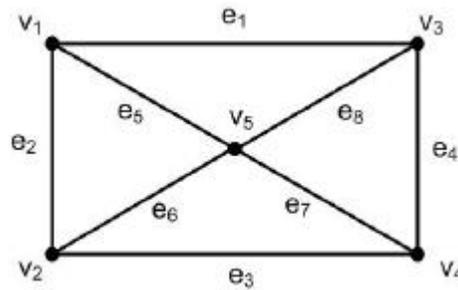
LANDASAN TEORI

Pada Bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Konsep dasar ini diawali dengan beberapa definisi dan terminologi dalam teori graf, jenis - jenis graf, pelabelan pada graf, dan teorema pendukung.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ terdiri atas himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dengan V adalah himpunan tak kosong dari titik (vertex) yang disebut himpunan titik, dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$, dimana anggotanya disebut sisi yang menghubungkan sepasang titik dan dinyatakan sebagai pasangan tak-terurut dari titik pada V [4].

Banyak titik yang ada pada G adalah $|V(G)|$, dan disebut orde dari G , sedangkan banyak sisi pada G adalah $|E(G)|$, dan disebut ukuran(size) dari G . sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1. Graf G_1

bahwa Graf G_1 mempunyai titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi, $|V(G_1)| = 5$ dan $|E(G_1)| = 8$.

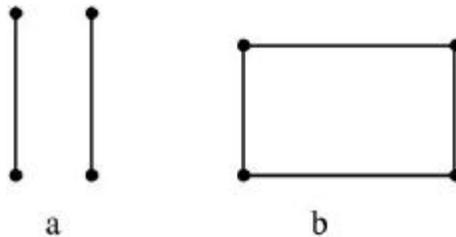
Jika sisi $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u disebut bertetangga dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan terkait dengan titik u dan v , juga titik u dan v dikatakan terkait dengan sisi e . Banyak sisi yang terkait dengan titik v dinamakan derajat titik v , ditulis $d(v)$ [4].

Suatu sisi e disebut loop, jika $e = (v, v)$ untuk suatu $v \in V(G)$. Suatu sisi disebut sisi ganda (multiple edge), jika terdapat lebih dari satu sisi yang terkait dengan 2 titik. Walk (jalan) pada suatu graf misalkan graf G adalah barisan titik pada G yang dimulai dari titik awal v_i dan berakhir pada titik akhir v_j dan setiap titiknya dihubungkan oleh sebuah sisi.

Pada walk, jika sebuah sisinya dilewati tidak lebih dari satu kali maka walk tersebut dikatakan trail (jalur). Walk yang semua titiknya berbeda disebut path (lintasan).

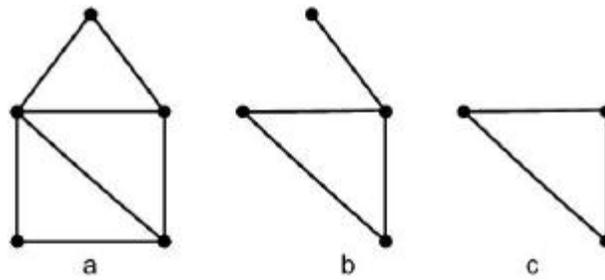
Path yang titik awal dan titik akhirnya sama dikatakan cycle(sikel). Banyak sisi dalam path disebut length(panjang) dari path tersebut. Path dan cycle dengan n titik berturut-turut dinotasikan dengan P_n dan C_n . Length dari path P_n adalah $(n - 1)$ sisi.

Dua buah titik v_1 dan titik v_2 disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 . Graf G disebut Graf terhubung(connected graph) jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Jika tidak demikian, maka G disebut Graf tak terhubung(disconnected graph) seperti pada gambar 2.2.



Gambar 2.2. (a) Graf tak terhubung (b) Graf terhubung

Suatu graf H disebut subgraf dari G jika $E(H) \subseteq E(G)$ dan $V(H) \subseteq V(G)$. Jika $E(H) = \{xy \in E(G) | x, y \in V(H)\}$, maka H dikatakan subgraf yang diinduksi(induced subgraph) oleh $V(H)$ dari G seperti pada gambar 2.3.



Gambar 2.3. (a) Graf G, (b) Subgraf dari Graf G, (c) Subgraf yang diinduksi dari graf G

2.2 Jenis - Jenis Graf

Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis:

1. Graf sederhana (simple graph)

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun loop.

2. Graf tak-sederhana (unsimple graph)

Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau loop. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (multigraph) dan graf semu (pseudograph). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan loop.

Definisi 2.2.[4] Banyak titik pada graf disebut sebagai kardinalitas graf, dinyatakan dengan $n = |V|$ dan banyak sisi dinyatakan dengan $m = |E|$.

Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga (limited graph)

Graf berhingga adalah graf yang banyak titiknya n , berhingga.

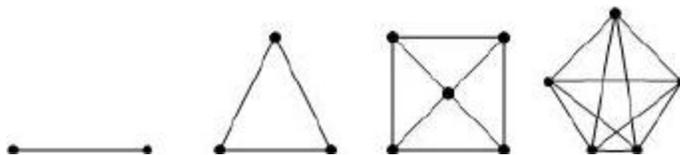
2. Graf tak-berhingga (unlimited graph)

Graf tak-berhingga adalah graf yang banyak titiknya n , tak berhingga.

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan :

1. Graf Lengkap (Complete Graph)

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap titiknya terhubung (oleh satu sisi) ke semua titik lainnya. Dengan kata lain, setiap titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Banyak sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n - 1)/2$ sisi. Sebagai contoh, dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.4. contoh Graf Lengkap

2. Graf Lingkaran (Cycle Graph)

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n .

3. Graf Roda (Wheels Graph)

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran C_n , dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut.

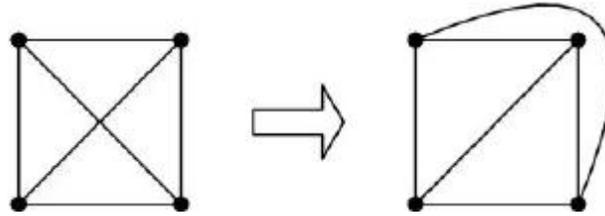
4. Graf Teratur (Regular Graph)

Graf teratur merupakan graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap titik pada graf teratur adalah r , maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat r . Banyak sisi pada graf teratur dengan n titik adalah $nr/2$ sisi.

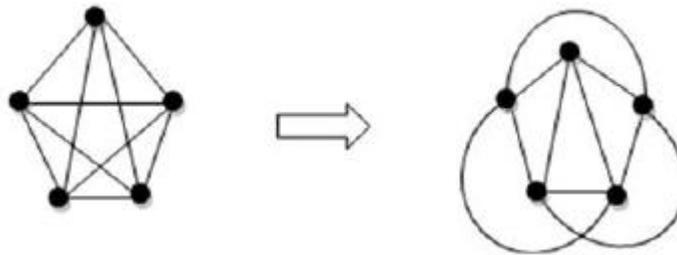
5. Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)

Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar sehingga tidak ada dua sisi yang saling bersilangan maka graf tersebut dinamakan Graf planar. Jika tidak demikian maka graf tersebut dinamakan Graf non-planar. Perlu diperhatikan bahwa belum tentu suatu graf yang secara kasat mata terlihat sisi-sisinya saling bersilangan adalah graf non-planar. Graf tersebut mungkin saja planar, karena graf tersebut dapat digambarkan kembali dengan cara yang berbeda yang sisi-sisinya tidak saling bersilangan. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut, graf K_4 pada Gambar 2.5 adalah graf planar karena graf tersebut dapat digambarkan kembali tanpa ada sisi-sisi yang

bersilangan, sedangkan K_5 pada Gambar 2.6 bukan graf planar karena jika direpresentasikan ke graf bidang maka terdapat dua sisi yang bersilangan.



Gambar 2.5. K_4 adalah Graf Planar



Gambar 2.6. K_5 adalah bukan Graf Planar

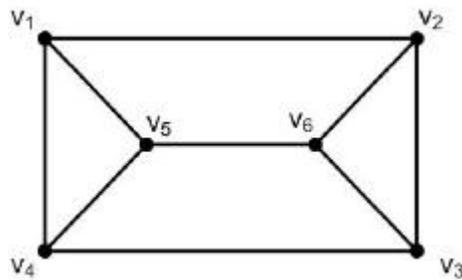
Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling bersilangan disebut graf bidang (plane graph).

6. Graf Hamiltonian (Hamiltonian Graph)

Sebuah cycle pada graf G yang memuat setiap titik dari G dinamakan Hamiltonian cycle. Graf Hamiltonian adalah graf yang memuat Hamiltonian cycle. Oleh karena itu, pastilah graf C_n ($n \geq 3$) adalah Hamiltonian dan juga untuk $n \geq 3$, graf lengkap K_n merupakan graf Hamiltonian.

7. Graf Halin (Halin Graph)

Suatu Graf Halin H adalah graf planar yang dibangun dengan menggambar sebuah tree T yang setidaknya terdiri dari empat titik pada suatu bidang, dimana T tidak memuat titik berderajat dua dan menghubungkan semua titik pada tree dengan cycle C . Sebagai contoh, dapat dilihat pada Gambar 2.7



Gambar 2.7. Graf Halin

2.3 Pemetaan [5]

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan $f : A \rightarrow B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain). Secara umum, pemetaan dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut :

1. Pemetaan satu-satu (Injektif)

Pemetaan satu-satu (injektif) adalah pemetaan dimana setiap elemen di

daerah kodomain yang berpasangan, mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, dapat ditulis secara matematika sebagai berikut :

$$f : A \rightarrow B, \text{ injektif} \Leftrightarrow \forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

2. Pemetaan Pada Surjektif

Pemetaan pada (surjektif) adalah pemetaan dimana semua elemen di daerah kodomain mempunyai pasangan elemen di daerah domain, dapat dituliskan secara matematika sebagai berikut :

$$f : A \rightarrow B, \text{ surjektif} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \quad y = f(x).$$

3. Pemetaan Korespondensi satu-satu bijektif

Pemetaan korespondensi satu-satu (bijektif) adalah pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan pemetaan surjektif.

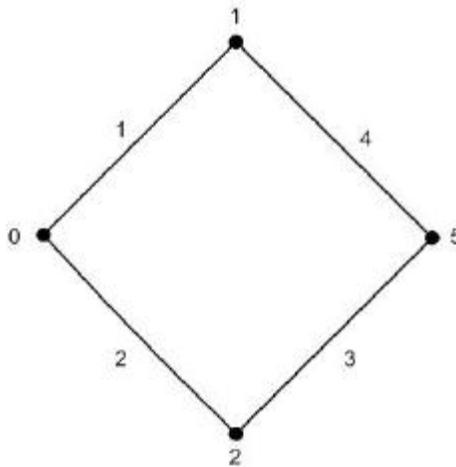
2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik(vertex labeling). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi(edge labeling), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total(total labeling).

Sebuah tree memiliki n titik, maka graf tersebut memiliki $n-1$ sisi. Apabila $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, sedemikian sehingga pelabelan pada setiap sisi sama dengan selisih dari pelabelan dua titik ujung, maka tree dinamakan graceful[5].

Definisi 2.3.[1] Misalkan G adalah suatu graf berorder n dan size m . Jika $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ adalah suatu pelabelan dari G , sedemikian sehingga himpunan bobot yang diinduksi oleh f adalah $\{1, 2, \dots, m\}$, maka f dikatakan pelabelan graceful dari G , dan G dinamakan graf graceful.

Graf graceful dapat ditunjukkan pada Gambar 2.8



Gambar 2.8. Contoh Graf Graceful

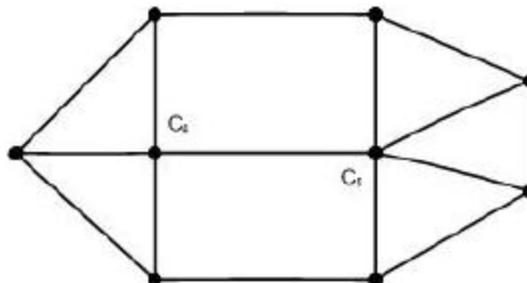
BAB III

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF HALIN

$G(2, n)$, UNTUK $n \geq 3$

Pada bab ini akan dijelaskan hasil utama dari inti pembahasan skripsi ini yaitu pelabelan graceful pada Graf Halin $G(2, n)$, untuk $n \geq 3$.

Misalkan $G(k, l)$ merupakan graf planar yang mempunyai himpunan sisi E . Himpunan sisi E dapat didekomposisi ke dalam dua sub himpunan sisi yang saling lepas yaitu himpunan tree T dan himpunan cycle C , sehingga $E = T \cup C$ dan $T \cap C = \emptyset$. Sub graf dari $G(k, l)$ diinduksi pada T yang merupakan sebuah tree dengan satu titik u berderajat k , satu titik v berderajat l , u dan v bertetangga, dan sisanya $k + l - 2$ titik berderajat satu dan sub graf yang diinduksi pada C . C adalah cycle dengan panjang $k + l - 2$ yang melewati semua titik dari $G(k, l)$ kecuali u dan v [6]. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 3.1



Gambar 3.1. Graf Halin $G(4, 5)$

3.1 Pelabelan graceful pada graf halin $G(2, n)$

Berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh Teorema 3.1 sebagai berikut :

Teorema 3.1. [6] Graf halin $G(2, n)$ adalah graceful.

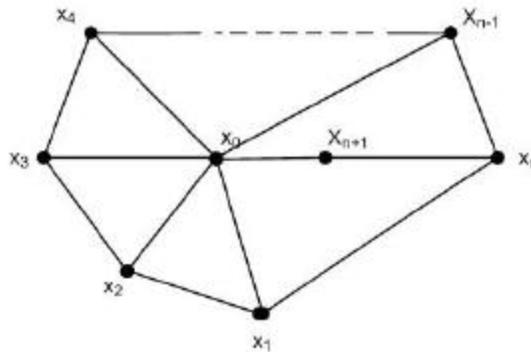
Bukti.

Misalkan Graf Halin $G(2, n)$ dengan $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik

$V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ dan himpunan sisi $E = \bigcup_{i=1}^n \{x_i, x_{i+1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} \{x_0, x_j\} \cup$

$\{x_0, x_{n+1}\} \cup \{x_1, x_n\}$. Dalam hal ini berarti $|V| = n+2$ dan $|E| = 2n+1$. Sehingga

graf $G(2, n)$ dapat digambarkan seperti Gambar 3.2



Gambar 3.2. Graf Halin $G(2, n)$

Definisikan untuk $n \geq 5$ pelabelan titik $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n+1\}$ dengan

cara sebagai berikut :

kasus 1 : untuk n ganjil dan $n \geq 5$, definisikan label titik sebagai berikut :

- $f(x_{n+1}) = 0,$
- $f(x_n) = 2n,$
- $f(x_0) = 2n + 1,$

$$\cdot f(x_{n-1}) = 2n - 1,$$

$$\cdot f(x_i) = \begin{cases} \vdots i + 1 & \text{jika } i \in \{1, 3, \dots, n - 2\}, \\ \vdots 2n - i & \text{jika } i \in \{2, 4, \dots, n - 3\}. \end{cases}$$

Selanjutnya, misalkan w menyatakan bobot sisi pada $G(2, n)$, sehingga pelabelan sisi dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

1. Untuk pelabelan semua bobot sisi genap didefinisikan sebagai

$$\cdot w(x_i, x_{i+1}) = 2(n - i - 1) \quad \text{untuk } i \in \{1, 2, \dots, n - 3\},$$

$$\cdot w(x_0, x_{n-1}) = 2,$$

$$\cdot w(x_1, x_n) = 2n - 2,$$

$$\cdot w(x_n, x_{n+1}) = 2n.$$

2. Untuk pelabelan semua bobot sisi ganjil didefinisikan sebagai

$$\cdot w(x_0, x_i) = \begin{cases} \vdots 2n - i & \text{untuk } i \in \{1, 3, \dots, n - 2\}, \\ \vdots i + 1 & \text{untuk } i \in \{2, 4, \dots, n - 3\}, \end{cases}$$

$$\cdot w(x_{n-1}, x_n) = 1,$$

$$\cdot w(x_{n-2}, x_{n-1}) = n,$$

$$\cdot w(x_0, x_{n+1}) = 2n + 1.$$

kasus 2 : untuk n genap dan $n \geq 6$, definisikan label titik sebagai berikut :

$$\cdot f(x_{n+1}) = 0,$$

$$\cdot f(x_n) = 2n,$$

$$\cdot f(x_0) = 2n + 1,$$

$$\cdot f(x_1) = 2,$$

$$\cdot f(x_2) = 4,$$

$$\cdot f(x_3) = 5,$$

$$\cdot f(x_i) = \begin{cases} \vdots n + i & \text{jika } i \in \{4, 6, \dots, n - 2\}, \\ \vdots n - i + 5 & \text{jika } i \in \{5, 7, \dots, n - 1\}. \end{cases}$$

Selanjutnya, misalkan w menyatakan bobot sisi pada $G(2, n)$, sehingga pelabelan sisi dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

1. Untuk pelabelan semua bobot sisi genap didefinisikan sebagai

$$\cdot w(x_i, x_{i+1}) = 2i - 4 \quad \text{untuk } i \in \{4, 5, \dots, n - 1\},$$

$$\cdot w(x_1, x_2) = 2,$$

$$\cdot w(x_0, x_3) = 2n - 4,$$

$$\cdot w(x_1, x_n) = 2n - 2,$$

$$\cdot w(x_n, x_{n+1}) = 2n.$$

2. Untuk pelabelan semua bobot sisi ganjil didefinisikan sebagai

$$\cdot w(x_0, x_i) = \begin{cases} \vdots n - i + 1 & \text{untuk } i \in \{4, 6, \dots, n - 2\}, \\ \vdots n + i - 4 & \text{untuk } i \in \{5, 7, \dots, n - 1\}, \end{cases}$$

$$\cdot w(x_2, x_3) = 1,$$

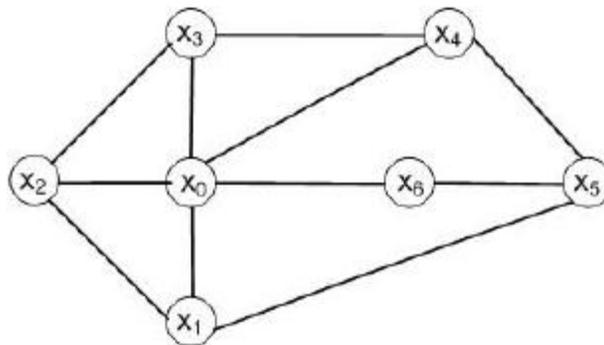
$$\cdot w(x_3, x_4) = n - 1,$$

- $w(x_0, x_1) = 2n - 1,$
- $w(x_0, x_2) = 2n - 3,$
- $w(x_0, x_{n+1}) = 2n + 1.$

Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh untuk mengilustrasikan teorema 3.1.

1. Graf $G(2, n)$ dengan $n = 5$

Diberikan penotasian titik pada Graf Halin $G(2, n)$ seperti pada Gambar 3.3



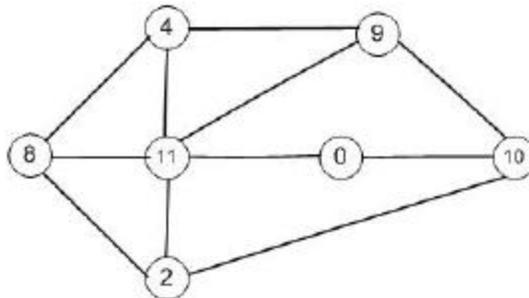
Gambar 3.3. Graf Halin $G(2, 5)$

Label titik dari Graf $G(2, 5)$ dapat dilihat pada tabel 3.1 berikut :

i	x_i	$f(x_i)$
0	x_0	$2n + 1 = 5$
1	x_1	$i + 1 = 2$
2	x_2	$2n - i = 8$
3	x_3	$i + 1 = 4$
4	x_4	$2n - 1 = 9$
5	x_4	$2n = 10$
6	x_6	0

Tabel 3.1. Pelabelan titik pada $G(2, 5)$

Setelah dilakukan pelabelan titik sesuai dengan definisi yang diberikan, diperoleh graf dengan pelabelan titik seperti Gambar 3.4



Gambar 3.4. Pelabelan titik pada $G(2, 5)$

Berdasarkan rumus pelabelan bobot sisi yang didefinisikan di atas, maka akan dicari bobot sisi pada $G(2, 5)$ sehingga diperoleh :

(a) Pelabelan untuk semua bobot sisi genap adalah

i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
1	2	(x_1, x_2)	$2(n - i - 1) = 6$
2	3	(x_2, x_3)	$2(n - i - 1) = 4$
0	4	(x_0, x_4)	2
1	5	(x_1, x_5)	$2n - 2 = 8$
5	6	(x_5, x_6)	$2n = 10$

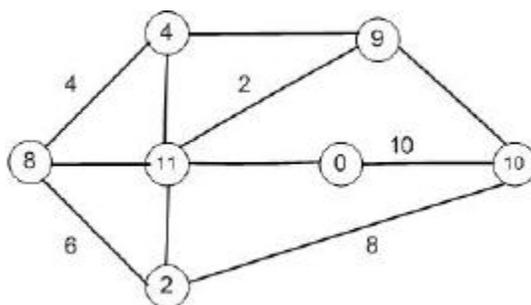
Tabel 3.2. Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 5)$

(b) Pelabelan untuk semua bobot sisi ganjil adalah

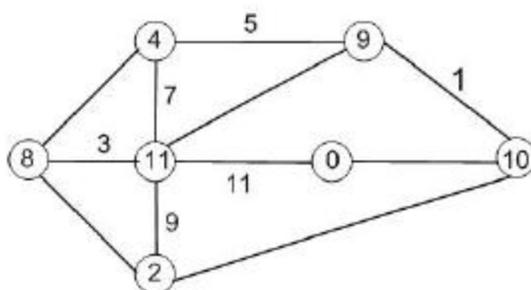
i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
0	1	(x_0, x_1)	$2n - i = 9$
0	3	(x_0, x_3)	$2n - i = 7$
0	2	(x_0, x_2)	$i + 1 = 3$
4	5	(x_4, x_5)	1
3	4	(x_3, x_4)	5
0	6	(x_0, x_6)	11

Tabel 3.3. Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 5)$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka dapat digambarkan pelabelan bobot sisi genap dan pelabelan bobot sisi ganjil seperti pada gambar 3.5 dan 3.6 berikut :



Gambar 3.5. Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 5)$

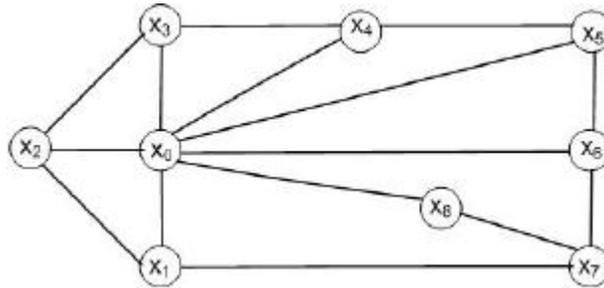


Gambar 3.6. Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 5)$.

2. Graf $G(2, n)$ dengan $n = 7$

Diberikan penotasian titik pada Graf Halin $G(2, n)$ seperti pada Gambar

3.7



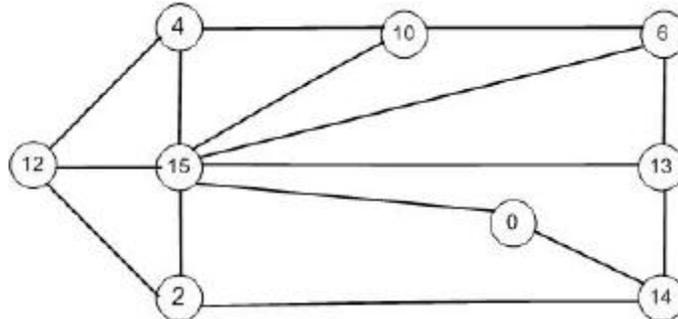
Gambar 3.7. Graf Halin $G(2, 7)$

Label titik dari Graf $G(2, 7)$ dapat dilihat pada tabel 3.4 berikut :

i	x_i	$f(x_i)$
0	x_0	$2n + 1 = 15$
1	x_1	$i + 1 = 2$
2	x_2	$2n - i = 12$
3	x_3	$i + 1 = 4$
4	x_4	$2n - i = 10$
5	x_5	$i + 1 = 6$
6	x_6	$2n - 1 = 13$
7	x_7	$2n = 14$
8	x_8	0

Tabel 3.4. Pelabelan titik pada $G(2, 7)$

Setelah dilakukan pelabelan titik sesuai dengan definisi yang diberikan, diperoleh graf dengan pelabelan titik seperti Gambar 3.8



Gambar 3.8. Pelabelan titik pada $G(2, 7)$

Berdasarkan rumus pelabelan bobot sisi yang didefinisikan di atas, maka akan dicari bobot sisi pada $G(2, 7)$ sehingga diperoleh :

(a) Pelabelan untuk semua bobot sisi genap adalah

i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
1	2	(x_1, x_2)	$2(n - i - 1) = 10$
2	3	(x_2, x_3)	$2(n - i - 1) = 8$
3	4	(x_3, x_4)	$2(n - i - 1) = 6$
4	5	(x_4, x_5)	$2(n - i - 1) = 4$
0	6	(x_0, x_6)	2
1	7	(x_1, x_7)	$2n - 2 = 12$
7	8	(x_7, x_8)	$2n$

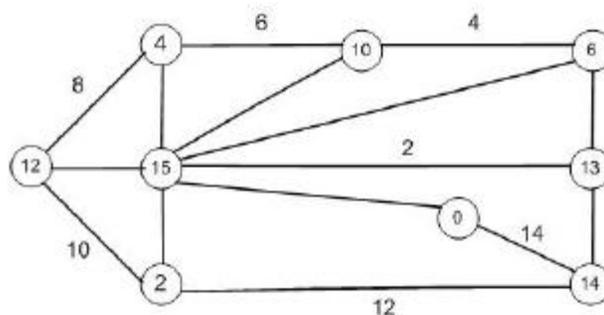
Tabel 3.5. Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 7)$

(b) Pelabelan untuk semua bobot sisi ganjil adalah

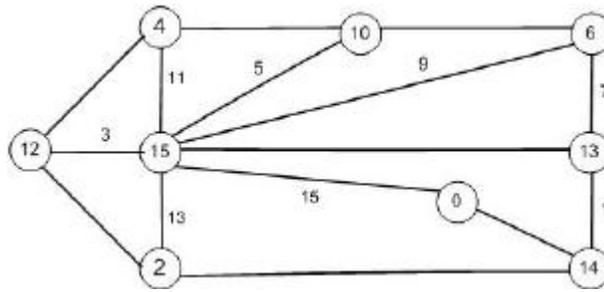
i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
0	1	(x_0, x_1)	$2n - i = 13$
0	3	(x_0, x_3)	$2n - i = 11$
0	5	(x_0, x_5)	$2n - i = 9$
0	2	(x_0, x_2)	$i + 1 = 3$
0	4	(x_0, x_4)	$i + 1 = 5$
5	6	(x_5, x_6)	$n = 7$
6	7	(x_6, x_7)	1
0	8	(x_0, x_8)	$2n + 1 = 15$

Tabel 3.6. Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 7)$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka dapat digambarkan pelabelan bobot sisi genap dan pelabelan bobot sisi ganjil seperti pada gambar 3.9 dan 3.10 berikut :



Gambar 3.9. Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 7)$

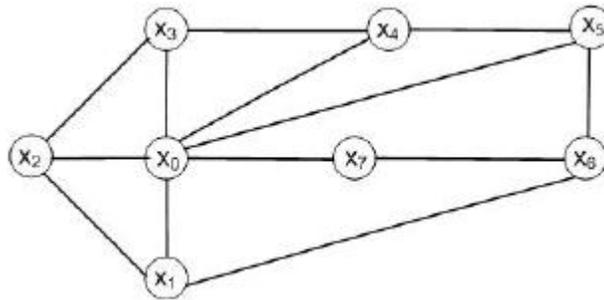


Gambar 3.10. Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 7)$

3. Graf $G(2, n)$ dengan $n = 6$

Diberikan penotasian titik pada Graf Halin $G(2, n)$ seperti pada Gambar

3.11



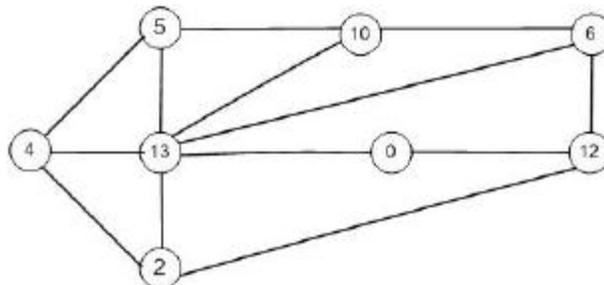
Gambar 3.11. Graf Halin $G(2, 6)$

Label titik dari Graf $G(2, 6)$ dapat dilihat pada tabel 3.7 berikut :

i	x_i	$f(x_i)$
0	x_0	$2n + 1 = 13$
1	x_1	2
2	x_2	4
3	x_3	5
4	x_4	$n + 1 = 10$
5	x_5	$n - i + 5 = 6$
6	x_6	$2n = 12$
7	x_7	0

Tabel 3.7. Pelabelan titik pada $G(2, 6)$

Setelah dilakukan pelabelan titik sesuai dengan definisi yang diberikan, diperoleh graf dengan pelabelan titik seperti Gambar 3.12



Gambar 3.12. Pelabelan titik pada $G(2, 6)$

Berdasarkan rumus pelabelan bobot sisi yang didefinisikan di atas,
 maka akan dicari bobot sisi pada $G(2, 6)$ sehingga diperoleh :

(a) Pelabelan untuk semua bobot sisi genap adalah

i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
1	2	(x_1, x_2)	2
4	5	(x_4, x_5)	$2i - 4 = 4$
5	6	(x_5, x_6)	$2i - 4 = 6$
0	3	(x_0, x_3)	$2n - 4 = 8$
1	6	(x_1, x_6)	$2n - 2 = 10$
6	7	(x_6, x_7)	$2n = 12$

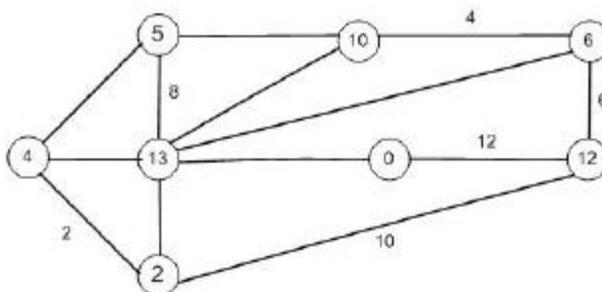
Tabel 3.8. Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 6)$

(b) Pelabelan untuk semua bobot sisi ganjil adalah

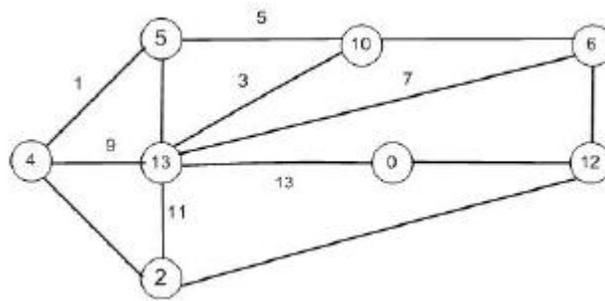
i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
0	4	(x_0, x_4)	$n - i + 1 = 3$
0	5	(x_0, x_5)	$n + i - 4 = 7$
2	3	(x_2, x_3)	1
3	4	(x_3, x_4)	$n - 1 = 5$
0	1	(x_0, x_1)	$2n - 1 = 11$
0	2	(x_0, x_2)	$2n - 3 = 9$
0	7	(x_0, x_7)	13

Tabel 3.9. Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 6)$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka dapat digambarkan pelabelan bobot sisi genap dan pelabelan bobot sisi ganjil seperti pada Gambar 3.13 dan 3.14 berikut :



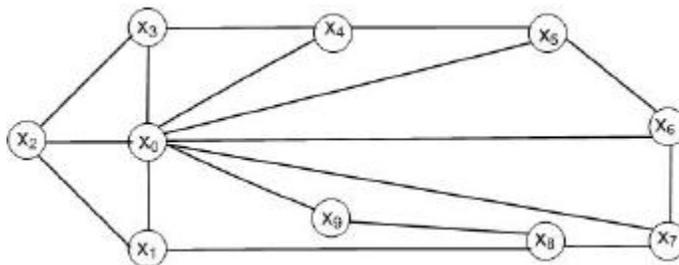
Gambar 3.13. Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 6)$



Gambar 3.14. Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 6)$

4. Graf $G(2, n)$ dengan $n = 8$

Diberikan penotasian titik pada Graf Halin $G(2, n)$ seperti pada Gambar 3.15



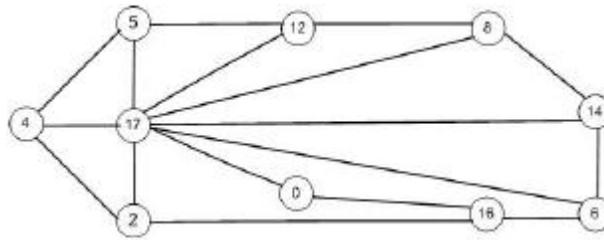
Gambar 3.15. Graf Halin $G(2, 8)$

Label titik dari Graf $G(2, 8)$ dapat dilihat pada tabel 3.10 berikut :

i	x_i	$f(x_i)$
0	x_0	$2n + 1 = 17$
1	x_1	2
2	x_2	4
3	x_3	5
4	x_4	$n + i = 12$
5	x_5	$n - i + 5 = 8$
6	x_6	$n + i = 14$
7	x_7	$n - i + 5 = 6$
8	x_8	$2n$
9	x_9	0

Tabel 3.10. Pelabelan titik pada $G(2, 8)$

Setelah dilakukan pelabelan titik sesuai dengan definisi yang diberikan, diperoleh graf dengan pelabelan titik seperti Gambar 3.16



Gambar 3.16. Pelabelan titik pada $G(2, 8)$

Berdasarkan rumus pelabelan bobot sisi yang didefinisikan di atas, maka akan dicari bobot sisi pada $G(2, 8)$ sehingga diperoleh :

(a) Pelabelan untuk semua bobot sisi genap adalah

i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
4	5	(x_4, x_5)	$2i - 4 = 4$
5	6	(x_5, x_6)	$2i - 4 = 6$
6	7	(x_6, x_7)	$2i - 4 = 8$
7	8	(x_7, x_8)	$2i - 4 = 10$
1	2	(x_1, x_2)	2
0	3	(x_0, x_3)	$2n - 4 = 12$
1	8	(x_1, x_8)	$2n - 2 = 14$
8	9	(x_8, x_9)	$2n = 16$

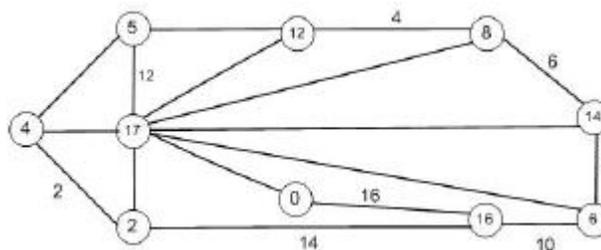
Tabel 3.11. Pelabelan bobot sisi genap pada $G(2, 8)$

(b) Pelabelan untuk semua bobot sisi ganjil adalah

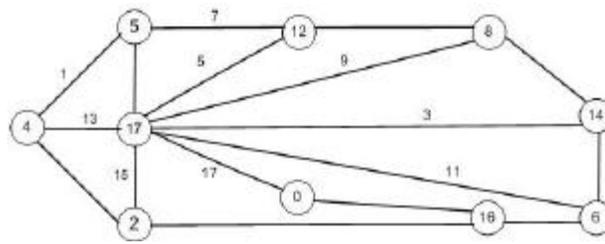
i	j	(x_i, x_j)	$w(x_i, x_j)$
0	4	(x_0, x_4)	$n - i + 1 = 5$
0	6	(x_0, x_6)	$n - i + 1 = 3$
0	5	(x_0, x_5)	$n + i - 4 = 9$
0	7	(x_0, x_7)	$n + i - 4 = 11$
2	3	(x_2, x_3)	1
3	4	(x_3, x_4)	$n - 1 = 7$
0	1	(x_0, x_1)	$2n - 1 = 15$
0	2	(x_0, x_2)	$2n - 3 = 13$
0	9	(x_0, x_9)	$2n + 1 = 17$

Tabel 3.12. Pelabelan bobot sisi ganjil pada $G(2, 8)$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka dapat digambarkan pelabelan bobot sisi genap dan pelabelan bobot sisi ganjil seperti pada gambar 3.17 dan 3.18 berikut :



Gambar 3.17. Pelabelan bobot sisi genap pada Graf Halin $G(2, 8)$



Gambar 3.18. Pelabelan bobot sisi ganjil pada Graf Halin $G(2, 8)$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa Graf Halin $G(2, n)$ adalah graceful. Pelabelan graceful pada Graf Halin $G(2, n)$ didefinisikan menjadi 2 kasus, yaitu kasus untuk n ganjil dan $n \geq 5$, dan kasus untuk n genap dan $n \geq 6$. Pada masing - masing kasus diperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi yang berbeda. Akibatnya diperoleh bahwa Graf Halin $G(2, n)$ adalah graceful.

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan graceful ini masih terbuka bagi peneliti lain. Penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian ini pada aplikasinya dan bisa juga mengadakan penelitian yang sama dengan jenis graf yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bondy, J. A. and U. S. R. Murty. 1976. Graph Theory with Applications. Macmillan, London.
- [2] Chartrand , G. and Lesniak. L . 1996. Graphs and Digraphs. London.
- [3] Gallian, J. 2003. A dynamic survey of graph labeling. The Electronic Journal Combinatorics.
- [4] Gross, J. L.and Yellen. J. 2003. Handbook of Graph Theory. CRC Press LLC, New York .
- [5] Hartsfield, N. and G. Ringel. 1994. Pearls in Graph Theory. Academic Press, New York .
- [6] Histamedika, G. 2011. pelabelan vertex-graceful pada graf-(5,6) dan graf-(6,7). Skripsi-SI, Tidak diterbitkan.
- [7] Kudlac, M. and S. Schrotter. 2006. Graceful Labelling of Special Halin Graph. Faculty of Electrical Engineering and Informatics, Kosice.
- [8] Sin-Min Lee, Y.C.Pan and Ming-Chen Tsai. 2005. Congressus Numerantium. 172: 65-68.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Dinny Fitriani, dilahirkan di Tembilahan pada tanggal 13 Maret 1990 dari pasangan Chairil Anwar dan Noni Lidya. Penulis adalah anak kedua dari dua bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 004 Tembilahan pada tahun 2002, SMPN 2 Tembilahan pada tahun 2005, dan SMA Negeri 1 Tembilahan pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Nasional).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), organisasi Koperasi Mahasiswa Universitas Andalas, dan pengajar privat mata pelajaran Matematika. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Kampung Bukit Silapu, Kenagarian Air Haji, Kecamatan Linggo Sari Baganti, Kabupaten Pesisir Selatan dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.