BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi-sisi graf F, senantiasa diperoleh F yang memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Selanjutnya, suatu *pewarnaan*-(G, H) pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G dan subgraf biru H. Jika suatu graf F^* mempunyai *pewarnaan*-(G, H), maka dinotasikan $F^* \nrightarrow (G, H)$.

Dengan menggunakan notasi panah di atas didefinisikan dua jenis bilangan Ramsey berikut. *Bilangan Ramsey graf* $R(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya titik minimum dari graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \rightarrow (G, H)$. Sementara *bilangan Ramsey sisi* $\hat{r}(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimum dari suatu graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F.

Nilai eksak $\hat{r}(G, H)$ terkait dengan banyaknya sisi minimal yang dimiliki suatu graf F sedemikian sehingga $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F. Pertanyaan yang timbul adalah, apakah graf F yang memenuhi kedua persyaratan tersebut tunggal? Bila tidak, bagaimana karakterisasi dari semua graf F tersebut? Pertanyaan tersebut mengantarkan kepada konsep graf Ramsey (G, H)-minimal.

Burr dkk. [6] memunculkan pertanyaan tentang karakterisasi semua graf F yang memenuhi kedua syarat di atas. Graf F tersebut dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H)-minimal. Semua graf yang memenuhi syarat tersebut dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan kelas Ramsey (G, H)-minimal, dan dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$.

Masalah dalam kajian tentang $\mathcal{R}(G,H)$ adalah karakterisasi dan penentuan semua graf F yang berada dalam kelas tersebut. Secara umum pengkarakterisasian semua graf F dalam $\mathcal{R}(G,H)$ adalah hal yang sukar dilakukan, meskipun untuk pasangan graf (G,H) yang sederhana dan berukuran kecil. Selanjutnya $\mathcal{R}(G,H)$ dikatakan berhingga jika banyaknya graf yang berada dalam kelas tersebut berhingga, sebaliknya jika banyaknya graf dalam kelas tersebut tidak berhingga maka $\mathcal{R}(G,H)$ dikatakan tidak berhingga. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang $\mathcal{R}(G,H)$ berhingga.

Berikut beberapa hasil terkait kelas $\mathcal{R}(G,H)$ berhingga. Dalam [2] dibuktikan kelas $\mathcal{R}(2K_2,2K_2) = \{3K_2, C_5\}$. Selanjutnya Burr, dkk [3] membuktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m dan sebarang graf H, kelas $\mathcal{R}(mK_2,H)$ merupakan kelas berhingga. Mereka menunjukkan hal tersebut dengan memberikan batas atas untuk banyaknya sisi yang dipunyai setiap graf $F \in \mathcal{R}(mK_2,H)$.

Mengersen dan Oeckermann [6] menentukan anggota $\mathcal{R}(2K_2,K_{1,n})$ untuk $n \leq 3$ serta memberikan karakterisasi dari graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2,K_{1,n})$. Selanjutnya Baskoro dan Yulianti [1] menentukan anggota $\mathcal{R}(2K_2,P_n)$ untuk $n \geq 3$. Mereka membuktikan bahwa $2P_n$ adalah satu-satunya graf tak terhubung yang berada di kelas tersebut. Mereka juga memberikan syarat perlu untuk graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2,H)$ dimana H adalah graf terhubung sebarang. Berdasarkan hasil tersebut, Tatanto dan Baskoro [8] menunjukkan bahwa $3P_n$ dan $F \cup G$ adalah dua graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2,2P_n)$, untuk F dan G yang menjadi anggota di $\mathcal{R}(2K_2,P_n)$. Dalam makalah yang sama, mereka memberikan syarat perlu suatu graf menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2,2H)$, untuk H graf terhubung sebarang.

Berdasarkan syarat perlu suatu graf adalah anggota $\mathcal{R}(2K_2,2H)$ dalam [8] dan anggota $\mathcal{R}(2K_2,K_{1,n})$ dalam [6], menarik untuk dikaji tentang graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2,2K_{1,n})$. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan ditentukan anggota $\mathcal{R}(2K_2,2K_{1,n})$ untuk $n = 2$ dan 3.

1.2 Batasan Masalah

Secara umum, karakterisasi dan penentuan semua anggota $\mathcal{R}(mK_2, H)$ untuk $m \geq 3$ dan H graf sebarang masih sangat sukar untuk dilakukan, karena terdapat lebih banyak kemungkinan pewarnaan merah-biru yang tidak memuat mK_2 merah. Untuk itu, penelitian ini dibatasi pada penentuan anggota $\mathcal{R}(2K_2, 2K_{1,n})$, dimana graf $2K_2$ adalah graf yang terdiri dari dua sisi yang saling bebas, dan $K_{1,n}$ adalah graf bintang dengan n sisi.

1.3 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada penelitian ini yaitu graf apa yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, 2K_{1,n})$ untuk $n = 2$ dan 3.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah menentukan graf-graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, 2K_{1,n})$ untuk $n = 2$ dan 3.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tentang graf Ramsey minimal.

1.6 Sistematika Penulisan

Tesis ini terdiri dari empat bab dengan sistematika sebagai berikut. Pada Bab I diuraikan tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian serta sistematika penulisan tesis.

Pada Bab II disajikan landasan teori dan definisi yang mendukung pembahasan dalam permasalahan penentuan graf Ramsey minimal dalam tesis ini serta beberapa hasil terdahulu yang berkaitan dengan graf Ramsey minimal. Sementara pada Bab III dipaparkan hasil yang berkaitan dengan $\mathcal{R}(2K_2, 2K_{1,n})$. Hasil utama penelitian disajikan dalam bentuk lema dan teorema yang diberi tanda $\diamondsuit$.

Pada Bab IV disajikan kesimpulan dan saran berdasarkan hasil yang telah diperoleh dalam penelitian tesis ini.