

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah bagian dari disiplin ilmu matematika diskrit. Ilmu ini pertama kali muncul pada tahun 1736 tatkala Leonhard Euler mencoba menyelesaikan sebuah masalah yang terkenal, yaitu Masalah Jembatan Königsberg. Königsberg adalah suatu kota tua di Prusia Timur Jerman yang sekarang dikenal dengan sebutan Kalinigrad. Untuk memungkinkan penghuni Königsberg berjalan dari satu kota ke kota lainnya, tujuh jembatan dibangun di atas sungai Pregel. Pada saat itu orang-orang Königsberg berusaha membuat sebuah rute sekitar kota, yang mampu membuat mereka menyeberangi ketujuh jembatan itu satu kali saja dan kembali ke tempat semula. Mereka sampai pada satu kesimpulan bahwa hal tersebut tergolong mustahil, karena semua usaha yang dilakukan tak pernah membuahkan hasil. Agar bisa melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula, Euler mengatakan bahwa banyaknya jembatan yang terhubung pada setiap daratan haruslah berjumlah genap.

Teori graf sangat berguna untuk mengembangkan model-model terstruktur dalam berbagai situasi termasuk pada contoh kasus di atas. Struktur-struktur yang terdiri atas kumpulan obyek-obyek yang berkaitan satu sama lain dapat dibuat

modelnya dengan sebuah graf, dengan titik sebagai representasi obyeknya, dan sisi sebagai representasi kaitan atau hubungan diantara obyek-obyek tersebut. Tujuannya adalah sebagai visualisasi obyek-obyek agar lebih jelas dan lebih mudah di mengerti.

Terdapat banyak sekali istilah pada teori graf, salah satunya adalah injeksi. Suatu injeksi dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli N yang *tidak harus terurut*. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya berupa himpunan titik, maka injeksi disebut *injeksi titik*. Apabila daerah asalnya hanya berupa himpunan sisi, maka disebut *injeksi sisi*. Apabila daerah asal dari pemetaan merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka injeksi disebut juga *injeksi total*.

Suatu *injeksi titik ajaib* pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif μ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli N , sedemikian sehingga untuk setiap titik x di G berlaku : $\mu(x) + \sum_{y \sim x} \mu(xy) = h$, untuk suatu bilangan bulat positif h . Notasi $y \sim x$ menunjukkan y bertetangga dengan x .

Suatu *injeksi sisi ajaib* pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif μ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli N , sedemikian sehingga untuk setiap sisi xy di G berlaku : $\mu(x) + \mu(xy) + \mu(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif k .

Untuk suatu graf sederhana G , misalkan terdapat suatu injeksi $\mu : V(G) \cup E(G) \rightarrow N$. Jika untuk setiap titik $x \in V$ berlaku : $\mu(x) + \sum_{y \sim x} \mu(xy) = h$, dan untuk setiap sisi $xy \in E$ berlaku : $\mu(x) + \mu(xy) + \mu(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif h dan k , maka μ dinamakan Injeksi Total Ajaib (*Totally Magic Injection*) dari G , yang untuk selanjutnya disingkat sebagai TMI dari G . Jika terdapat TMI

pada graf G , maka label terbesar pada TMI tersebut dinotasikan sebagai $m_t(G)$. Didefinisikan juga defisiensi total ajaib (*the total deficiency*) dari G , dinotasikan $def_t(G)$, adalah $def_t(G) = m_t(G) - v - e$. Notasi v menyatakan banyaknya titik di G , dan e menyatakan banyaknya sisi di G .

Bandingkan dengan definisi Pelabelan Total Ajaib (*Totally Magic Labeling*) atau yang biasa disingkat TML [4], di mana setiap titik dan sisi dari G dilabeli dengan bilangan asli terurut, atau dapat dituliskan sebagai $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$. Dapat dilihat bahwa definisi Injeksi Total Ajaib (TMI) merupakan generalisasi dari TML. Simbol μ digunakan untuk TMI, untuk membedakannya dari simbol λ yang biasa digunakan pada TML.

Kebanyakan graf hanya memiliki injeksi titik ajaib saja atau injeksi sisi ajaib saja. Jadi, tidak mengherankan bahwa graf yang memiliki TMI jarang ditemui. Pada subbab 5 dari [5], dikatakan bahwa diantara 208 graf dengan banyak titik maksimum 6, tepatnya terdapat 174 graf yang memiliki injeksi titik ajaib, kesemuanya 208 graf memiliki injeksi sisi ajaib, tetapi hanya 12 graf saja yang memiliki TMI.

Pada tugas akhir ini penulis melakukan kajian kembali terhadap paper [5] bahwa terdapat injeksi total ajaib pada graf hutan F . Graf hutan F di sini adalah graf pohon atau gabungan dari graf pohon.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah apakah terdapat injeksi total ajaib (TMI) μ pada suatu graf hutan F dan menentukan defisiensi total ajaibnya.

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengkaji kembali graf hutan F yang memiliki TMI dan menentukan defisiensi total ajaib dari graf F tersebut.

1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tugas akhir ini dibagi menjadi empat bab. Bab I terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Pada Bab II akan dijelaskan landasan teori tentang konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi graf, jenis-jenis graf yang digunakan dalam penelitian, injeksi total ajaib (TMI) pada graf, teorema dan lema pendukung, serta contoh-contoh graf yang telah dibuktikan memiliki TMI. Sedangkan Bab III memuat pembahasan dari permasalahan. Penulisan ini diakhiri dengan Bab IV yang berisi kesimpulan dari pembahasan masalah.