BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Koteswara Rao pada tahun 1994 pertama kali memperkenalkan konsep A^*-Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim, (\cdot)_\pi, 0, 1, 2)$ pada suatu himpunan tak kosong A, dengan operasi-operasi biner $\wedge$ (*meet*) dan $\vee$ (*join*), operasi tunggal $(\cdot)^\sim$ (*tilda*), unsur identitas 0 dan 1 terhadap operasi $\vee$ dan $\wedge$ berturut-turut, dan unsur 2 yang memenuhi $2 \wedge x = 2\ \forall x \in A$. Pada tahun 2003, Koteswara Rao dan Venkateswara Rao mempelajari aljabar Boolean dan A^*-Aljabar, serta metode penurunan A^*-Aljabar dari aljabar Boolean dan sebaliknya. Kemudian pada tahun 2004, Koteswara Rao dan Venkateswara Rao memperkenalkan konsep *Prime Ideals* dan kekongruenan dalam A^*-Aljabar, dan juga memperkenalkan teorema Cayley untuk A^*-Aljabar pada tahun 2005.

Gagasan Pra A^*-Aljabar diperkenalkan pada tahun 2000 oleh Venkateswara Rao. Pra A^*-Aljabar adalah suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ dimana A merupakan himpunan tak kosong dengan $\wedge$ (*meet*) dan $\vee$ (*join*) adalah operasi biner dan $(\cdot)^\sim$ adalah operasi tunggal, jika $\forall x, y, z \in A$ berlaku :

1. $x^{\sim\sim} = x$,

2. $x \wedge x = x$,

3. $x \wedge y = y \wedge x$,

4. $(x \wedge y)^{\sim} = x^{\sim} \vee y^{\sim}$,

5. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

6. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

7. $x \wedge y = x \wedge (x^{\sim} \vee y)$.

Suatu himpunan tak kosong A dengan sebuah operasi biner " $*$ " pada A dinamakan sebuah *semilattice* jika elemen-elemennya memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

(i) $x^*x = x, \forall x \in A$ (disebut sifat idempoten),

(ii) $x^*y = y^*x, \forall x, y \in A$ (disebut sifat komutatif),

(iii) $x^*(y^*z) = (x^*y)^*z, \forall x, y, z \in A$ (disebut sifat asosiatif).

Pada tulisan ini akan didefinisikan suatu operasi biner " $*$ " pada Pra A^*-Aljabar. Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya suatu Pra A^*-Aljabar dinotasikan sebagai $\bar{A}$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $(\bar{A},^*)$ adalah sebuah semilattice. Selanjutnya akan dibuktikan beberapa sifat pada suatu relasi terurut parsial " $\leq_*$ " yang diinduksi dari struktur semilattice $(\bar{A},^*)$. Di samping itu juga akan dikaji tentang nilai supremum dan nilai infimum dari beberapa sub himpunan pada semilattice $(\bar{A},^*)$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, jika diberikan suatu Pra A^*-Aljabar $\bar{A}$ maka yang menjadi permasalahan dalam penulisan ini adalah :

1. Bagaimana membuktikan bahwa $(\bar{A},^*)$ adalah sebuah semillatice ?

2. Bagaimana membuktikan sifat-sifat pada suatu relasi terurut parsial " $\leq_*$ " yang diinduksi dari struktur semilattice $(\bar{A},^*)$?

3. Apa supremum dari $\{x, x^\sim\}$ dan infimum dari $\{x, y\}$, $\forall x, y \in A$ pada semilattice $(\bar{A},^*)$?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan ini adalah mendefinisikan sebuah operasi biner " $*$ " pada Pra A^*-Aljabar $\bar{A}$ dan menunjukkan bahwa $(\bar{A},^*)$ adalah sebuah semilattice. Kemudian akan dikaji sifat-sifat pada suatu relasi terurut parsial " $\leq_*$ " yang diinduksi dari struktur semilattice $(\bar{A},^*)$. Selanjutnya juga akan ditentukan nilai supremum dari $\{x, x^\sim\}$ dan nilai infimum dari $\{x, y\}$, $\forall x, y \in A$ pada semilattice $(\bar{A},^*)$.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut. Bab I merupakan pendahuluan yang berisikan latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Pada Bab II dikemukakan landasan teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah pada skripsi ini. Bab III merupakan pembahasan tentang struktur semilattice pada Pra A^*-Aljabar $\bar{A}$. Terakhir pada bab IV disajikan kesimpulan dari pembahasan.