BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi-sisi graf F, senantiasa diperoleh F yang memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Selanjutnya, suatu *pewarnaan*-(G, H) pada graf F didefinisikan sebagai suatu pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H. Jika suatu graf F^* mempunyai *pewarnaan*-(G, H), maka dinotasikan $F^* \nrightarrow (G, H)$.

Dengan menggunakan notasi panah di atas didefinisikan dua jenis bilangan Ramsey berikut. *Bilangan Ramsey graf* dinotasikan $R(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya titik minimum dari graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \rightarrow (G, H)$. Selanjutnya *bilangan Ramsey sisi* dinotasikan $\hat{r}(G, H)$ didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimum graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$.

Nilai eksak $\hat{r}(G, H)$ terkait dengan banyaknya sisi minimal yang dimiliki suatu graf F sedemikian sehingga $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F. Pertanyaan yang timbul adalah, apakah graf F yang memenuhi kedua persyaratan tersebut tunggal? Bila tidak, bagaimana karakterisasi dari semua graf F tersebut! Pertanyaan tersebut mengantarkan kita kepada konsep graf Ramsey (G, H)-minimal.

Burr dkk. [3] memunculkan pertanyaan tentang karakterisasi semua graf F yang memenuhi kedua syarat di atas. Graf F tersebut dikatakan sebagai *graf Ramsey* $(G, H)-minimal$. Semua graf yang memenuhi syarat tersebut dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey* $(G, H) - minimal$, dan dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$.

Masalah dalam kajian tentang $\mathcal{R}(G, H)$ adalah karakterisasi dan penentuan semua graf F yang berada dalam kelas tersebut. Secara umum pengkarakterisasian semua graf F dalam $\mathcal{R}(G, H)$ adalah hal yang sukar dilakukan, meskipun untuk pasangan graf (G, H) yang sederhana dan berukuran kecil. Selanjutnya $\mathcal{R}(G, H)$ dikatakan berhingga jika banyaknya graf yang berada dalam kelas tersebut berhingga. Sebaliknya $\mathcal{R}(G, H)$ dikatakan tidak berhingga jika banyaknya graf yang berada dalam kelas tersebut tidak berhingga. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang $\mathcal{R}(G, H)$ berhingga.

Berikut beberapa hasil terkait $\mathcal{R}(G, H)$ berhingga. Burr dkk. [3] membuktikan bahwa $\mathcal{R}(2K_2, 2K_2) = \{3K_2, C_5\}$. Selanjutnya Burr dkk. [2] membuktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m dan sebarang graf H, $\mathcal{R}(mK_2, H)$ merupakan kelas berhingga. Mereka menunjukkan hal tersebut dengan memberikan batas atas untuk banyaknya sisi yang dipunyai setiap graf $F \in \mathcal{R}(mK_2, H)$.

Karakterisasi anggota $\mathcal{R}(2K_2, tK_2)$ untuk $t \geq 4$ diberikan oleh Burr dkk. [4]. Dalam makalah yang sama, mereka juga mengidentifikasi semua anggota kelas tersebut untuk $t \leq 4$. Selanjutnya Mengersen dan Oeckermann [6] memberikan karakterisasi semua graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,s})$ untuk $s \geq 3$ dan menentukan anggota kelas tersebut untuk $s \leq 3$. Kemudian Mengersen dan Oeckermann [7] memberikan batas atas dan batas bawah dari orde dan ukuran graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, tK_2)$ untuk $t \geq 2$.

Pada [10] Yulianti memberikan syarat perlu untuk graf yang termuat dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ dan menemukan graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Selanjutnya Baskoro dan Yulianti [1] memberikan karakterisasi graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, P_n)$, serta menentukan semua graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, P_4)$ dan $\mathcal{R}(2K_2, P_5)$. Kemudian Tatanto dan Baskoro [9] memberikan syarat perlu dari $\mathcal{R}(2K_2, 2P_n)$ untuk $n \geq 3$, dan menentukan semua graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, 2P_3)$.

Karakterisasi dan penentuan anggota $\mathcal{R}(mK_2, H)$ berhingga untuk $m \geq 3$ dan graf H sebarang juga sangat sukar untuk dilakukan. Hal ini dikarenakan lebih banyak kemungkinan pewarnaan merah-biru yang tidak memuat mK_2 merah. Oleh karena itu penelitian ini dibatasi pada penentuan anggota $\mathcal{R}(2K_2, 2C_n)$ untuk $n = 3$ dan 4, dimana $2K_2$ adalah graf yang terdiri dari dua graf K_2 dan $2C_n$ adalah dua graf siklus dengan n titik.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah pada penelitian ini yaitu graf apa yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, 2C_n)$ untuk $n = 3$ dan 4.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu untuk menentukan graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, 2C_n)$ untuk $n = 3$ dan 4.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tentang graf Ramsey minimal. Diharapkan penelitian ini juga dapat menambah wawasan bagi penulis maupun pembaca.

1.5 Sistematika Penulisan

Tesis ini terdiri dari empat bab dengan sistematika sebagai berikut. Pada Bab I diuraikan tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Sedangkan pada Bab II diberikan teori-teori dan definisi yang mendukung pembahasan dalam permasalahan penentuan graf Ramsey minimal. Kemudian, pembahasan serta penyelesaian permasalahan dalam tesis ini diberikan pada Bab III. Penulisan tesis ini diakhiri oleh Bab IV yang berisi kesimpulan dan beberapa masalah terbuka yang diperoleh berdasarkan hasil penelitian tesis. Hasil utama penelitian diberikan dalam bentuk lema dan teorema yang diberi tanda $\diamondsuit$.