Jurnal Matematika dan Pengetahuan Alam
Volume 6, Nomor 1, Tahun 1997

ISSN 0853-0033

PENGEMBANGAN SIFAT PYTHAGORAS YANG MENGGUNAKAN HUBUNGAN KESETARAAN

Adrian Ausri

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Andalas

ABSTRACT

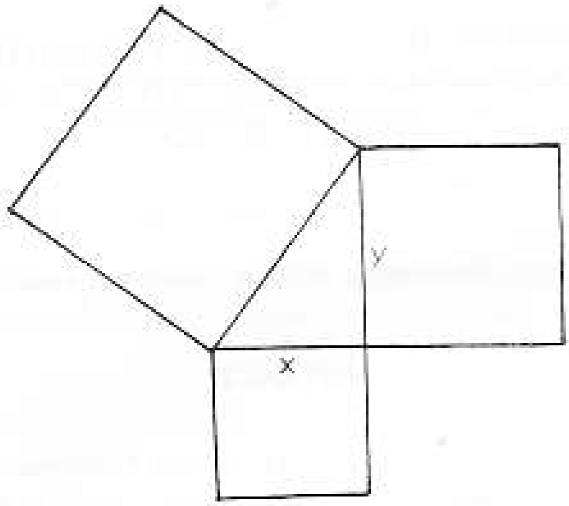
The formula $x^2 + y^2 = r^2$ of the Pythagoras theorem state that the quadratic sum of two side, x and y, of the right triangle XYR be equal to the square of the third side, r. This research shows that the Pythagoras theorem can be extended to summing the area of the region bounded by continous functions on certain intervals x, y and r. This result is obtained by using the equivalent relation on the region.

PENDAHULUAN

Salah satu sifat dalam ilmu geometri bidang datar yang sangat terkenal adalah sifat Pythagoras untuk segitiga siku-siku (Gambar 1), yang menggunakan persamaan

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

Andaikan disetiap setiap sisi segitiga XYR, dilukis segi empat seperti terlihat pada Gambar 1. Besaran dalam persamaan (1) merupakan penjumlahan luas dua buah segiempat yang masing-masing mempunyai sisi x dan y, dengan luas satu segi empat yang sisinya adalah r. Kalau dilakukan pengamatan dengan lebih seksama, akan terlihat bahwa adanya kesetaraan ketiga segi empat tersebut.



Gambar 1

Dari referensi (Cotexer, 1989) dan (Herstein, 1975) diketahui bahwa hubungan kesetaraan mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitif. Jika hubungan kesetaraan tersebut dikembangkan untuk bangun bidang yang tak teratur, seperti halnya ketika menghitung luas bangun yang menggu-nakan integral tentu; maka masalah yang muncul adalah: jika pada setiap sisi segitiga siku-siku XYR dilukis bentuk bangun bidang rumit (tak teratur), apakah masih terdapat keterkaitannya dengan sifat Pythagoras (Persamaan 1).

Untuk memecahkan kasus ini, penulis merancang bentuk studi kasus dan kemudian menarik suatu kesimpulan umum tentang tentang kasus tersebut.

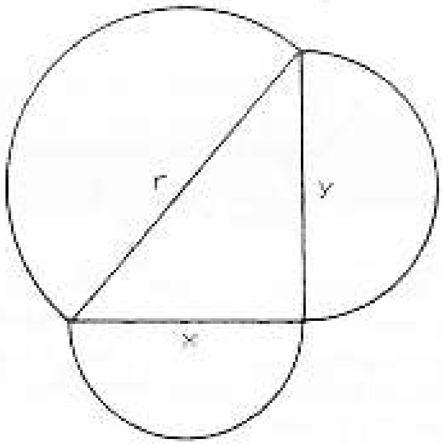
Hasil studi kasus dan penelitian yang dilakukan, akan menjawab masalah yang dikemukan. Jadi sasaran yang ingin dikemukakan dalam tulisan ini adalah: dengan menggunakan prinsip kesetaraan, tiga bentuk luas bangun tak teratur yang terkait dengan sisi segitiga siku-siku XYR, luas salah satu bangun merupakan penjumlahan dari dua luas bangun yang lainnya.

STUDI KASUS DAN HASIL

1. Jika kedua ruas persamaan (1), dikalikan dengan konstanta $A = \frac{\Pi}{4}$, maka didapat

$$Ax^2 + Ay^2 = Ar^2 \qquad (2)$$

Besaran Ax^2 , Ay^2 dan Ar^2 merupakan luas dari lingkaran yang bergaris tengah x, y dan r (pada Gambar 2 digambar setengah lingkaran).



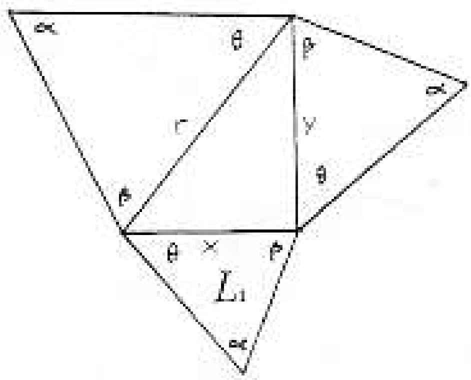
Gambar 2

2. Misalkan pada segi tiga siku-siku XYR (gambar 2) dilukis setengah lingkaran. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1) dengan konstanta $\frac{\Pi}{8}$, akan didapat bentuk:

$$\frac{\Pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\Pi}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\Pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Besaran nilai $\frac{\Pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$, $\frac{\Pi}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2$ dan $\frac{\Pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2$

merupakan luas setengah lingkaran yang bergaris tengah x, y dan r.



Gambar 3

3. Misalkan pada segitiga siku-siku XYR dilukis segitiga-segitiga lain yang mempunyai sifat sebangun. Misalkan setiap segitiga itu mempunyai sudut-sudut α , β dan θ (seperti terlihat pada Gambar 3). Jika α merupakan sudut yang terletak didepan sisi-sisi segitiga siku-siku XYR, maka luas segitiga baru dengan salah satu sisinya x adalah

$$L_1 = x^2 K$$

dengan nilai $K = \dfrac{\sin\beta \sin\theta}{2\sin\alpha}$ (hal ini dengan mudah dapat ditunjukkan menggunakan kalkulus geometri sederhana).

Faktor K merupakan suatu konstanta. Jika kedua ruas persamaan (1) dikalikan dengan faktor K maka diperoleh:

$$Kx^2 + Ky^2 = Kr^2 \qquad (3)$$

Masing- masing komponen pada persamaan (3) adalah luas segitiga yang bersesuaian dengan sisi-sisi x, y dan r. Ini menyimpulkan bahwa penjumlahan bangun yang bersesuaian dengan sisi x dan y adalah sama dengan luas bangun yang bersesuaian dengan sisi r.

Hubungan kesetaraan

1. **Hubungan kesetaraan pada selang.**
   Definisi : dua selang dikatakan setara jika kedua selang tersebut mempunyai panjang yang sama.

   Contoh : selang $0 \leq t \leq x_1$ dan selang $0 \leq \frac{x_2}{x_1} t \leq x_2$ adalah setara.

2. **Hubungan kesetaraan pada fungsi**

   Misalkan f_{x_1} suatu fungsi kontinu pada selang $0 \leq t \leq x_1$ dan F_{x_2} suatu fungsi kontinu pada selang $0 \leq t \leq x_2$.

   Fungsi f_{x_1} dikatakan setara dengan F_{x_2} jika dan hanya jika

   $$F_{x_1} = \frac{x_2}{x_1} f\left(\frac{x_1}{x_2} t\right) \quad \text{untuk setiap t, } 0 \leq t \leq x_2.$$

3. **Hubungan kesetaraan pada luas daerah**

   Misalkan $D_{x_1} = D_{x_1}(f_{x_1}, g_{x_1})$ suatu daerah pada bidang-xy yang dibatasi oleh:

1. Fungsi $f_{x_1}(x)$ dan $g_{x_1}(x)$

2. Garis x = 0 dan $x = x_1$.

$D_{x_2} = D_{x_2}(F_{x_2}, G_{x_2})$ suatu daerah pada bidang-xy yang dibatasi oleh:

1. Fungsi F_{x_2} dan G_{x_2}

2. Garis x = 0 dan $x = x_2$.

Definisi : Daerah D_{x_1} setara dengan D_{x_2} jika dan hanya jika f_{x_1} setara F_{x_2} dan g_{x_1} setara G_{x_2}

Berdasarkan hasil studi kasus dan dengan memperhatikan hubungan kesetaraan dua luas daerah yang dibatasi oleh dua fungsi kontinu pada suatu selang $0 \leq t \leq x_1$ maka sifat Pythagoras $x^2 + y^2 = r^2$, dimodifikasi menjadi sifat berikut ini.

Misalkan fungsi f_{x_1} dan g_{x_1} memenuhi hubungan $f_{x_1} \leq g_{x_1}$,untuk setiap $0 \leq t \leq x_1$ dan luas daerah D_{x_1} adalah

$$L(f_{x_1}, g_{x_1}) = \int_0^{x_1} \left(f_{x_1} - g_{x_1} \right) dt$$

Modifikasi sifat tersebut dinyatakan sebagai berikut.

Sifat 1: Misalkan pada suatu segitiga siku-siku berlaku hubungan $x^2 + y^2 = r^2$, yang masing-masing besaran x, y dan r, merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku XYR. Jika luas daerah $L(f_x, g_x)$, $L(F_y, G_y)$ dan $L(h_r, l_r)$ masing-masing saling setara maka berlaku hubungan:

$$L(f_x, g_x) + L(F_y, G_y) = L(h_r, l_r)$$

Bukti

$$L(f_x, g_x) + L(F_y, G_y)$$

$$= \int_0^x \left(f_x - g_x\right) t\,dt + \int_0^y \left(F_y - G_r\right) t\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{x}{r}\left(h_r - l_r\right)\left(\frac{r}{x} t\right) dt + \int_0^y \frac{y}{r}\left(h_r - l_r\right)\left(\frac{r}{y} t\right) dt$$

$$= \frac{x^2}{r^2} \int_0^r \left(h_r - l_r\right) t\,dt + \frac{y^2}{r^2} \int_0^r \left(h_r - l_r\right) t\,dt$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{r^2} \int_0^r \left(h_r - l_r\right) t\,dt$$

$$= L(h_r, l_r)$$

Sifat 2:

Jika sifat pythagoras untuk segitiga sebarang berlaku hukum kosinus $r^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$ dengan α merupakan sudut apit sisi x dan y, maka berlaku hubungan:

$$L(h_r, l_r) = L(f_x, g_x) + L(F_y, G_y) - \frac{2xy\cos\alpha}{r^2} L(h_r, l_r)$$

KESIMPULAN

Jika kita dapat membangun suatu kesetaraan luas bidang pada bidang kartesian, baik beraturan ataupun tidak beraturan yang terkait dengan nilai x, y dan r , yang merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku XYR, maka dapat diperoleh suatu hasil bahwa penjumlahan luas bidang yang terkait dengan nilai x dan y adalah sama dengan luas bidang yang terkait dengan nilai r.

Penelitian ini masih mungkin diperluas untuk kemungkinan-kemungkinan yang lain (perluasan untuk ruang R^3).

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. , 1988, *Calculus with Analytics Geometry*, John Wiley.

Clay, James R and Yuen Fong, 1995, Generalization of Pythagoras Theorem., *Sea Bull Math*, Vol. 19 No. 1.

Cotexer, H S N., 1989, *Introduction to Geometry*, 2ed, John Wiley.

Herstein, I.N., 1975, *Topics in Algebra*, , 2ed, John Wiley.