B)

SIFAT KONTINU FUNGSI PRIMITIF DARI FUNGSI TERINTEGRAL MCSHANE-PETTIS

Haripamyu dan Jenizon
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

ABSTRAK

Dalam makalah ini didefinisikan konsep integral McShane-Pettis untuk fungsi yang memetakan suatu sel E di R^n ke suatu ruang Banach X. Dengan menggunakan fungsi interval pada koleksi semua interval dalam sel $E \subset R^n$, dibangun definisi primitif fungsi terintegral McShane. Selanjutnya akan dibangun definisi primitif fungsi terintegral McShane-Pettis. Dalam penelitian ini dibuktikan kekontinuan primitif dari fungsi terintegral McShane-Pettis.

Keywords: Primitif fungsi terintegral McShane. Primitif fungsi terintegral McShane-Pettis.

1. PENDAHULUAN

Pfeffer (1993) menyusun teori integral McShane pada ruang Euclide R^n (bernilai ril) dengan menggunakan persekitaran berupa kubus (cubes) dan volume yang digunakan berupa fungsi volume yang bersifat umum (aditif dan non negatif).

Pada tahun 1994, Gordon membuktikan bahwa untuk fungsi bernilai ril, integral Lebesgue ekuivalen dengan integral McShane. Dengan menggunakan hasil tersebut, Guoju dan Schwabik (2002) membandingkan integral Lebesgue-Pettis dengan integral McShane fungsi yang memetakan interval di dalam R^n ke ruang Banach X. Berdasarkan definisi integral Lebesgue-Pettis dan integral McShane dibangun definisi integral McShane-Pettis.

Dengan menggunakan fungsi interval pada koleksi semua interval dalam sel $E \subset R^n$, dibangun definisi primitif fungsi terintegral McShane. Selanjutnya akan dibangun definisi primitif fungsi terintegral McShane-Pettis. Dalam penelitian ini dibuktikan kekontinuan primitif dari fungsi terintegral McShane-Pettis.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini disajikan definisi dan beberapa sifat dasar integral McShane fungsi yang terdefinisi pada sel $E \subset R^n$. Ruang R^n merupakan ruang bernorma terhadap norma $\| \ \|_\infty : \|\bar{x}\|_\infty = \underset{1 \le i \le n}{maks} |x_i|$. Sebagai akibatnya jarak (metric) antara dua titik atau antara dua vektor $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$ dinyatakan dengan

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty = maks\left\{ |x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Jarak antara titik $\bar{x}$ dengan himpunan A di dalam R^n adalah :

$$d(\bar{x}, A) = \inf\{d(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in A\}.$$

Untuk $\bar{x} \in R^n$, persekitaran (neighborhood) titik $\bar{x}$ dengan jari-jari $r > 0$ didefinisikan dengan

$$B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} : \bar{y} \in R^n \ dan \ \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty < r\}$$

Jika $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dua titik di dalam R^n maka interval $[\bar{a}, \bar{b}]$ yang didefinisikan dengan

$[\bar{a}, \bar{b}] = \{\bar{x} : x \in R^n \ dan \ a_i \le x_i \le b_i \ untuk \ i = 1, \ldots, n\}$ disebut interval tertutup sejati (non-degenerated closed interval) atau sel, jika $\bar{a} < \bar{b}$. Jika tidak demikian $[\bar{a}, \bar{b}]$ disebut interval degenerated (degenerated interval).

Koleksi sel dikatakan tidak saling tumpang tindih (non overlapping) jika interior-interior sel tersebut saling asing.

Berikut ini beberapa sifat interval dan sel. Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sel-sel yang tidak saling tumpang tindih di dalam sel $E \subset R^n$ dan $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_p}$ di dalam E. Himpunan pasangan sel titik D = $\{(A, \bar{x})\}$ =

$\{(A_1,\overline{x_1}),(A_2,\overline{x_2}),\ldots,(A_p,\overline{x_p})\}$ disebut partisi Lebesgue di dalam (pada) $E \subset R^n$ jika $\bigcup_{i=1}^{p} A_i \subset E$ $\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i = E\right)$.

(i) Jika $D = \{(A, \overline{x})\}$ partisi Lebesgue di dalam (pada) E dengan $\overline{x_i} \in A_i$ untuk setiap i maka D disebut partisi Perron di dalam (pada) E.

(ii) Jika δ fungsi positif pada E, $D = \{(A, \overline{x})\}$ partisi Lebesgue di dalam (pada) E dengan $A_i \subset B(\overline{x_i}, \delta(\overline{x_i}))$ untuk setiap i maka D disebut partisi Lebesgue (McShane) δ-fine di dalam (pada) E.

Titik $\overline{x}$ dengan $(I, \overline{x}) \in D$ disebut titik terkait (associated point) dan I disebut selang δ-fine dengan titik terkait $\overline{x}$. Untuk selanjutnya yang digunakan di dalam tulisan ini adalah partisi McShane δ-fine. Untuk setiap fungsi positif δ pada sel $E \subset R^n$ terdapat partisi δ-fine pada E.

Fungsi $f : E \subset R^n \to R$ dikatakan terintegral McShane pada E jika terdapat bilangan $S \in R$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \overline{\xi})\} = \{(I_1,\overline{\xi_1}),(I_2,\overline{\xi_2}),\ldots,(I_q,\overline{\xi_q})\}$ pada E berlaku

$\left|(D)\sum f(\overline{\xi})\mu(I) - S\right| = \left|\sum_{i=1}^{q} f(\overline{\xi})\mu(I) - S\right| < \varepsilon$ dengan $\mu(I)$ menyatakan ukuran Lebesgue pada sel I.

Fungsi $f: E \to R$ terintegral McShane pada himpunan terukur $A \subset E$ jika $f\chi_A$ terintegral McShane pada E dengan χ_A fungsi karakteristik pada A. Koleksi semua fungsi terintegral McShane pada sel E dilambangkan dengan $M(E)$. Selanjutnya $S \in R$ yang dimaksud dalam Definisi 7 disebut nilai integral McShane fungsi f pada $E \subset R^n$ dan ditulis $S = (M)\int_E f$.

Jika $f, g : E \to R$ terintegral McShane pada sel $E \subset R^n$ dan c suatu skalar, maka $f + g$ dan cf terintegral McShane pada E dan

$$(M)\int_E (f+g) = (M)\int_E f + (M)\int_E g \text{ dan } (M)\int_E cf = c\left((M)\int_E f\right).$$

Fungsi $f: E \to R$ terintegral McShane pada sel E jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi McShane δ-fine $P_1 = \{(I, \bar{\xi})\}$ dan $P_2 = \{(J, \bar{\xi})\}$ pada E berlaku

$$\left|(P_1)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - (P_2)\sum f(\bar{\xi})\mu(J)\right| < \varepsilon$$

Jika f terintegral McShane pada sel E_1 dan E_2 di dalam R^n yang tidak saling tumpang tindih dan $E = E_1 \cup E_2$, maka f terintegral McShane pada E dan $(M)\int_E f = (M)\int_{E_1} f + (M)\int_{E_2} f$.

Berdasarkan definisi dan sifat-sifat yang telah diuraikan dibangun definisi integral McShane-Pettis sebagai berikut

Diberikan sel $E \subset R^n$. Fungsi $f: E \to R$ dikatakan terintegral McShane-Pettis jika untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A sehingga $x^*(x_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f)$.

Jika f terintegral McShane-Pettis pada E yaitu untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A memenuhi $x^*(x_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f)$, maka nilai $x_{(f,A)}$ tunggal.

Koleksi semua fungsi terintegral McShane-Pettis pada E dilambangkan dengan $MP(E)$. Selanjutnya vektor $x_{(f,A)} \in X$ yang dimaksud disebut nilai integral McS hane-Pettis fungsi f pada $A \subset E$ dan ditulis $x_{(f,A)} = (\text{MP})\int_A f$.

Jadi $x^*(x_{(f,A)}) = x^*((MP)\int_A f) = (M)\int_A x^*(f)$.

Jika E_1 dan E_2 sel-sel tidak saling tumpang tindih, $f \in MP(E_1)$ dan $f \in MP(E_2)$ maka $f \in MP(E_1 \cup E_2)$ dan $(MP)\int_{A\cup B} f = (MP)\int_A f + (MP)\int_B f$ untuk setiap himpunan terukur $A \subset E_1$ dan $B \subset E_2$. Jika $f \in MP(E)$ maka $f \in MP(B)$ untuk setiap sel bagian $B \subseteq E$.

Misalkan G fungsi interval aditif yaitu $G(I_1 \cup I_2) = G(I_1) + G(I_2)$ untuk setiap interval I_1 dan I_2 , $I_1^0 \cap I_2^0 = \phi$. Fungsi G yang dimaksud ini adalah fungsi bernilai riil yang terdefinisi pada E, yaitu koleksi semua interval bagian sel $E \subset R^n$ dengan $G(I) = 0$ untuk interval degenerate $I \subset E$. Fungsi aditif G dari E ke R dikatakan kontinu di sel $I \subseteq E$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ dengan sifat untuk setiap interval $J \subseteq I$ dengan $|J| < \eta$ berakibat $|G(J)| < \varepsilon$. Jika G kontinu di setiap sel $I \subseteq E$ maka dikatakan G kontinu pada sel E.

Fungsi aditif G dari E ke R dikatakan kontinu pada himpunan terbuka $B \subseteq E$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ dengan sifat untuk setiap sel $I \subseteq B$ dengan $|J| < \eta$ berakibat $|G(J)| < \varepsilon$.

Fungsi aditif G dari E ke R dikatakan kontinu mutlak pada sel E, ditulis $G \in AC(E)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ dengan sifat untuk setiap koleksi sel $D = \{I_i$, i = 1, 2, ..., d$\}$ yang tidak saling tumpang tindih di dalam E dan $\sum_{i=1}^{d} |I_i| < \eta$ berlaku $\sum_{i=1}^{d} |G(I_i)| < \varepsilon$.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur. Bahan-bahan yang diperlukan berupa konsep-konsep dasar dan teori-teori pendukung diperoleh dengan menelusuri buku-buku teks dan jurnal-jurnal ilmiah.

Berdasarkan data yang telah disusun, dibangun definisi fungsi primitif dari fungsi terintegral McShane-Pettis. Langkah berukutnya adalah membuktikan kekontinuan fungsi primitif dari integral McShane-Pettis dengan menggunakan kekontinuan fungsi primitif dari fungsi integral McShane. Terakhir adalah menyelidiki akibat-akibat dari kekontinuan fungsi primitif tersebut terhadap fungsi terintegral McShane-Pettis.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat kontinu primitif fungsi terintegral McShane-Pettis dibuktikan dengan menggunakan kekontinuan primitif fungsi terintegral McShane. Oleh karena itu terlebih dahulu dibahas tentang definisi sifat kontinu suatu fungsi dan pembuktian kekontinuan primitif fungsi terintegral McShane.

Berdasarkan konsep pada tinjauan pustaka dibangun fungsi primitif –M atas fungsi terintegral McShane pada sel $E \subset R^n$. Koleksi semua sel bagian sel E dilambangkan dengan E.

Jika G fungsi interval terdefinisi pada E dan untuk setiap sel $I \subseteq E$, $G(I)$ merupakan nilai integral-M fungsi f pada sel I maka G disebut primitif integral McShane f (primitif-f) pada sel E.

Oleh karena itu jika G merupakan primitif-M fungsi $f \in M(E)$ maka G merupakan fungsi interval aditif pada sel E, yaitu $G(B \cup C) = G(B) + G(C)$ untuk sebarang B dan C sel bagian E yang tidak saling tumpang tindih.

Setelah dibangun primitif-M atas fungsi terintegral-M pada sel E maka selanjutnya definisi integral-M dapat ditulis sebagai berikut:

Definisi 1. Fungsi $f: E \subset R^n \to R$ dikatakan terintegral McShane ke $G(E)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi}_1), (I_2, \bar{\xi}_2), \ldots, (I_q, \bar{\xi}_q)\}$ pada E berlaku

$$\left|(D)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$$

Lemma 2. Lemma Henstock. Jika $f \in M(E)$ yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi}_1), (I_2, \bar{\xi}_2), \ldots, (I_q, \bar{\xi}_q)\}$ pada E berlaku $\left|(D)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$

maka untuk setiap partisi McShane δ-fine D_I di dalam sel E dengan $D_I \subseteq D$ berlaku $\left|(D_I)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < 2\varepsilon$

Berdasarkan Lemma di atas dapat dibuktikan teorema berikut:

Teorema 3. Jika f $\in$ M(E) dengan primitif G maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine

$D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi}_1), (I_2, \bar{\xi}_2), \dots, (I_q, \bar{\xi}_q)\}$ pada E berlaku

$(D)\sum\left|f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$

Teorema 4. Jika G merupakan primitif fungsi terintegral McShane f pada sel $E \subset R^n$ maka G kontinu pada sel E.

Teorema 5. Misalkan $f \in M(E)$. Jika G primitif fungsi f maka G kontinu mutlak pada E.

Berikut ini disajikan definisi derivatif kuat primitif fungsi terintegral Mc Shane

Definisi 6. Misalkan G: $E \subset R^n \to R$ dan $\bar{c} \in$ E. Bilangan L adalah derivatif kuat dari G di $\bar{c}$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ sehingga

$$\left|\frac{G(J)}{\mu(J)} - L\right| < \varepsilon$$

jika J $\subseteq B(\bar{c}, \delta) \cap E$. Titik $\bar{c}$ yang dimaksud tidak harus merupakan anggota J.

Teorema 7.

Fungsi G terdiferensial kuat di setiap titik pada E jika dan hanya jika G' kontinu pada E. Khususnya jika G terdiferensial kuat di setiap titik pada E maka G kontinu kuat pada E

Misalkan koleksi semua himpunan bagian terukur sel $E \subset R^n$ dilambangkan dengan $I(E)$. Fungsi $F : I(E) \to X$ dengan rumus $F(A) = (MP)\int_A f$ dan $F(\phi) = 0$ untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ disebut primitif-MP fungsi f pada sel E.

Jika F merupakan primitif fungsi f yang terintegral McShane-Pettis pada suatu sel E maka F merupakan fungsi aditif yaitu F(A∪B) = F(A) + F(B) untuk sebarang himpunan terukur A dan B yang saling asing di dalam sel E.

Selanjutnya definisi integral McShane-Pettis dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 8. Fungsi $f : E \subset R^n \to X$ dikatakan terintegral McShane-Pettis jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $F(A) \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A sehingga $x^*(F(A)) = (M) \int_A x^*(f)$ dengan $F(A) = (MP)\int_A f$.

Teorema 9 Misalkan F primitif-MP fungsi f. Jika $f \in MP(E)$ maka F kontinu pada J(E).

Bukti :

Karena $f \in$ MP(E) maka untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A sehingga $x^*(x_{(f,A)}) = (M) \int_A x^*(f)$ dengan $x_{(f,A)} = (MP)\int_A f$.

Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $B \in$ J(E) dengan $B \subset A$. Karena $x^*(f)$ terintegral McShane pada A maka primitif fungsi $x^*(f)$, sebut G, kontinu pada A. Akibatnya terdapat fungsi positif δ dengan $\mu(A\text{-}B) < \delta$ sehingga berlaku $|G(A) - G(B)| < \varepsilon$. Perhatikan

$$\begin{aligned} \varepsilon > |G(A) - G(B)| = \left|(M)\int_A x^* f - (M)\int_B x^* f\right| &= \left|x^*(x_{(f,A)}) - x^*(x_{(f,B)})\right| \\ &= \left|x^*(x_{(f,A)} - x_{(f,B)})\right| \\ &= \|x^*\| \|x_{(f,A)} - x_{(f,B)}\| \end{aligned}$$

Jika $x^* \in B$ (X^*) maka $\|x_{(f,A)} - x_{(f,B)}\| < \varepsilon$. Karena $F(A) = x_{(f,A)} = (MP)\int_A f$ maka terbukti primitif-MP fungsi f kontinu pada $J(E)$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan definisi dan sifat-sifat integral Lebesgue-Pettis fungsi bernilai ruang Banach dan integral McShane fungsi bernilai ril dibangun definisi suatu integral yang dinamakan dengan integral McShane-Pettis fungsi bernilai ruang Banach. Telah dibuktikan beberapa sifat sederhana untuk fungsi terintegral McShane-Pettis.

Selanjutnya berdasarkan definisi fungsi interval aditif, dibangun definisi primitif fungsi terintegral McShane. Jika fungsi f terintegral MCShane-Pettis, maka primitifnya ada dan kontinu. Beberapa sifat lainnya dengan syarat-syarat tertentu juga dipenuhi oleh fungsi primitif ini.

DAFTAR PUSTAKA

1. Geitz, R.F., 1981, *Pettis Integration*, Proc. of the Amer. Math. Soc., vol. 82, pp. 81-86.
2. Gordon, R.A., 1994, *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, American Mathematical Sociaty, UK.
3. Haripamyu, 2003, *Integral McShane-Pettis*, Tesis S2 Program Studi Matematika Universitas Gadjah Mada.

4.Lee, P.Y., 2000, *Integral: An Easy Approach After Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press.

5.Pfeffer, W.F. , 1993, *The Riemann Approach to Integration: Local geometric theory*, Cambridge University Press.

6.Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York

7.Schwabik, S. And Guoju, Y. , 2002, *The McShane and The Pettis Integral of Banach Space-Valued Function Defined on* R^m, joined research result.

Wheeden, R.L and Zygmund, A. , 1977, *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker Inc, New York and Basel.