Jurnal Matematika dan Pengetahuan Alam
Volume 9, Nomor 1, Tahun 2000

ISSN 0853-0033

SIFAT REKONSTRUKSI DENGAN FRAME DI RUANG HILBERT

(Reconstruction Property With Frame In Hilbert Space)

I Made Arnawa dan Admi Nazra
Jurusan Matematika, FMIPAUniversitas Andalas, Padang

ABSTRACT

Let H a Hilbert space. A frame in H is a set of vectors in H, not necessarily orthonormal, which can be used to write a straightforward and completely explicit expansion for every vector in H. In this paper, a special property of frame will be discussed.
Key Words: Frame, Hilbert space, frame operator, linear operator.

PENDAHULUAN

Misalkan V ruang hasil kali dalam dan $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$basis ortonormal untuk V, maka menurut Kreyszig(1978) setiap vektor $v\in V$ dapat ditulis sebagai $v=<v,v_1>v_1 +\ldots+<v,v_n>v_n$. Secara umum, untuk ruang Hilbert H dengan $\{\psi_j, j\in N\}$ adalah basis ortonormal untuk H, menurut Kreyszig (1978), setiap $f\in H$ dapat ditulis sebagai $f=\sum_{j\in J}<f,\psi_j>\psi_j$.

Danbechies(1992) menyatakan bahwa kita masih dapat merekonstruksi setiap vektor F di ruang Hilbert H dengan menggunakan himpunan $\{\psi_j, j\in J\}$ J himpunan indeks yang bukan basis, yaitu menuliskan f sebagai $f=\sum_{j\in J}<f,\psi_j>\psi_j$, asalkan $\{\psi_j \quad j\in J\}$ membentuk frame.

Dalam prakteknya, apakah kita akan memilih basis ortonormal atau frame untuk merekonstruksi $f\in H$, tergantung dari persoalan yang dihadapi. Karena, baik basis ortonormal maupun frame mempunyai kelebihan dan kekurangannya masing-masing.

Rekonstruksi dengan basis ortonormal hanya membutuhkan satu iterasi untuk memperoleh kasalahan rekonstruksi nol, sedangkan secara umum tidak demikian halnya dengan frame. Sebaliknya, rekonstruksi dengan frame memberikan ekspektasi kesalahan rekonstruksi lebih kecil dibandingkan dengan ekspektasi kesalahan rekonstruksi dengan basis ortonormal (Arnawa,1999).

Berbeda dengan basis ortonormal, rekonstruksi dengan frame tidak tunggal (Danbechies,1992). Walaupun tidak tunggal, tetapi rekonstruksi dengan frame memberikan koefisien dengan sifat khusus.

Pada makalah ini akan dibahas salah satu sifat dari koefisien rekonstruksi dengan frame.

KONSEP DASAR FRAME

Definisi 1 Misalkan H ruang Hilbert dan J suatu himpunan indeks. Keluarga vektor $\{\psi_j;j\in J\}$, di H disebut *frame*, apabila terdapat $A, B\in R$, $0 < A \le B$ sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J}|<f,\psi_j>|^2 \le B\|f\|^2, \quad f\in H.$$

A dan B disebut *batas frame*. Apabila A dab B sama, maka $\{\psi_j : j\in J\}$ disebut *frame ketat*. Dengan demikian, pada suatu frame ketat, kita peroleh

$$\sum_{j\in J}|<f,\psi_j>|^2 = A\|f\|^2, \; f\in H.$$

Hubungan basis ortonormal dengan frame ketat di ruang Hilbert dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1 *Misalkan* H *ruang Hilbert. Keluarga vektor* $\{\psi_j : j\in J\}$, *membentuk basis ortonormal di* H *jika dan hanya jika keluarga vektor* $\{\psi_j : j\in J\}$ *membentuk frame ketat di* H *dengan batas frame* A=B=1 *dan* $\|\psi_j\| = 1$, $\forall j\in J$.

Bukti: Misalkan H ruang Hilbert dan $\{\psi_j : j\in J\}$ basis ortonormal di H. Maka $f=\sum_{j\in J} <f,\psi_j>\psi_j$, $\forall f\in H$. Akibatnya $\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} |<f,\psi_j>|^2$. Jadi, $\{\psi_j : j\in J\}$ membentuk frame di H dengan batas frame A=B=1 dan $\|\psi_j\| = 1$, $\forall j\in J$. Sebaliknya, misalkan $\|\psi_j\| = 1$, $\forall j\in J$ dan $\{\psi_j : j\in J\}$ membentuk frame di ruang Hilbert H dengan batas frame A=B=1. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\{\psi_j : j\in J\}$ himpunan ortonormal di H. Karena $\psi_j\in H$, $\forall j\in J$, maka kita peroleh

$$\|\psi_j\|^2 = \sum_{k\in J} |<\psi_j,\psi_k>|^2 = \|\psi_j\|^4 + \sum_{k\in J, k\neq j} |<\psi_j,\psi_k>|^2$$

Karena $\|\psi_j\|^2 = 1$, maka $<\psi_j,\psi_k> = 0$, $\forall j \neq k$. Sehingga $\{\psi_j : j\in J\}$ himpunan ortonormal di H. Selanjutnya, karena kesamaan Parseval dipenuhi, yakni

$$\sum_{j\in J} |<f,\psi_j>|^2 = \|f\|^2, \qquad f\in H.$$

Maka $\{\psi_j : j\in J\}$ himpunan ortonormal yang total di H.

Jadi, $\{\psi_j : j\in J\}$ basis ortonormal di H. ∎

Sifat "total" yang dimiliki oleh setiap basis untuk ruang Hilbert, juga dimiliki oleh frame, seperti dinyatakan oleh lemma berikut.

Lemma 1 *Misalkan* $\{\psi_j : j\in J\}$ *suatu frame di ruang Hilbert H dengan batas frame A dan B, A ≤ B. Jika* $f\in H$ *dan* $<f,\psi_j> = 0$, $\forall j\in J$. *Maka* $f = 0$.

Bukti: Misalkan $f\in H$ dengan $<f,\psi_j> = 0$, $\forall j\in J$. Maka

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} |<f,\psi_j>|^2 = 0 \le B\|f\|^2.$$

Karena $0<A$, maka $\|f\|^2 = 0$. Akibatnya $f = 0$. ∎

Lebih lanjut, misalkan $\{\psi_j : j\in J\}$ suatu frame di ruang Hilbert H, maka terdapat A, B ∈ □, 0 < A ≤ B sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} |<f,\psi_j>|^2 \le B\|f\|^2 \qquad f\in H.$$

Ini berarti, barisan $(<f,\psi_j>)\in \ell^2(J)$. Dengan demikian kita dapat mendefinisikan suatu pemetaan dari ruang Hilbert H ke ruang Hilbert $\ell^2(J)$ sebagai berikut.

Definisi 2 Misalkan $\{\psi_j : j\in J\}$ suatu frame di ruang Hilbert H, Operator linier F yang memetakan vektor $f\in H$. ke barisan $(<f,\psi_j>)\in \ell^2(J)$, yakni

$$F : H \to \ell^2(J)$$
$$F\ \square\ (<f,\psi_j>)$$

Disebut *operator frame* di H.

Misalkan $\{\psi_j : j\in J\}$ suatu frame di ruang Hilbert H dan F operator frame di H. Maka terdapat konstanta A dan B dengan $0 < A \le B < \infty$, sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \le \|F(f)\|^2 \le \sum_{j\in J} |<f,\psi_j>|^2 \le B\|f\|^2 \quad f\in H.$$

Ini berarti, F operator linier terbatas dan $\|F\| \le B^{\frac{1}{2}}$.

Misalkan $c=(c_j)\in \ell^2(J)$ dan $f\in H$, maka operator adjoint untuk F, yakni F^* dapat diperoleh dari hubungan

$$<F^*c, f> = <c, Ff> = \sum_{j\in J} c_j \overline{<f,\psi_j>} =$$
$$\sum_{j\in J} c_j <\psi_j, f> = <\sum_{j\in J} c_j\psi_j, f>.$$

Sehingga $F^*c = \sum_{j\in J} c_j\psi_j$. Masalahnya, apakah dijamin $\sum_{j\in J} c_j\psi_j \in H$. Teorema berikut menjamin hal ini.

Teorema 2 *Misalkan* $\{\psi_j : j\in J\}$ *suatu frame di H dengan batas frame A dan B, A≤ B. Maka* $\sum_{j\in J} c_j\psi_j \in H$, $(c_j)\in \ell^2(J)$.

Bukti: Misalkan $(c_j)\in \ell^2(J)$ dan N, M ∈ □, N > M. Tulis $Y_N = \sum_{j=1}^{N} c_j\psi_j$ dan $Y_M = \sum_{j=1}^{M} c_j\psi_j$.

Maka $Y_N - Y_M = \sum_{j=M+1}^{N} c_j\psi_j$. Akibatnya,

$$\|Y_N - Y_M\|^2 = <\sum_{j=M+1}^{N} c_j\psi_j, Y_N - Y_M> =$$
$$\sum_{j=M+1}^{N} c_j <\psi_j, Y_N - Y_M>$$

$$= \sum_{j=M+1}^{N} c_j \overline{< , Y_N - Y_M, \psi_j >}$$

$$\leq \left\|(c_j)\right\| \left\|(< Y_N - Y_M, \psi_j >)\right\|$$

$$=$$

$$\left(\sum_{j=M+1}^{N} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M+1}^{N} |< Y_N - Y_M, \psi_j >|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq$$

$$\left(\sum_{j=M+1}^{N} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} |< Y_N - Y_M, \psi_j >|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=M+1}^{N} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(B\|Y_N - Y_M\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga, $\|Y_N - Y_M\| \leq B^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M+1}^{N} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Selanjutnya, karena, maka $\|Y_N - Y_M\| \to 0$ bila $M \to \infty$. Jadi, (Y_N) barisan Cauchy di H.

Karena H len$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$gkap, maka

$$\lim_{N \to \infty} Y_N = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j \in H.$$ ■

Dengan demikian kita dapat mendefinisikan operator F^* dari ruang Hilbert $\ell^2(J)$ ke ruang Hilbert H sebagai berikut.

$$F^* : \ell^2(J) \to H$$

$$(c_j) \square \sum_{j \in J} c_j \psi_j.$$

Ini berarti, F* suatu operator linier. Selanjutnya mengingat $\|F\| = \|F^*\|$ dan $\|F\| \leq B^{\frac{1}{2}}$, maka kita peroleh

$$\|F^* c\| \leq \|F^*\| \, \|c\| = \|F\| \, \|c\| \leq B^{\frac{1}{2}} \, \|c\|,$$

$c \in \ell^2(J)$.

jadi, F* operator linier terbatas.

Perhatikan bahwa, apabila $\{\psi_j : j \in J\}$suatu frame di H maka $(< f, \psi_j >) \in \ell^2(J)$, $\forall f \in H$. Akibatnya , $\sum_{j \in J}(< f, \psi_j >)\psi_j \in H$. Dengan demikian kita dapat mendefinisikan operator F* F ynag bekerja pada H sebagai berikut.

$$F^* F : H \to H$$

$$f \square \sum_{j \in J}(< f, \psi_j >)\psi_j$$

Karena F dan F* masing-masing operator linier terbatas, maka komposisinya juga operator linier terbatas. Disamping itu, ternyata F* F mempunyai balikan, ini dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema 3 *Misalkan* $\{\psi_j : j \in J\}$ *suatu frame di ruang Hilbert* H *dengan batas frame* A *dan* B, A≤ B. *Misalkan pula* F *operator frame di* H, F* *operator adjoint untuk* F, *dan* I *operator identitas di* H. *Maka*

$$AI \leq F^* F \leq BI \quad \text{dan} \quad B^{-1}I \leq (F^* F)^{-1} \leq A^{-1}I \qquad (2.1)$$

Dengan $(F^* F)^{-1}$ *merupakan balikan dari* F* F.

Bukti: Misalkan $\{\psi_j : j \in J\}$ suatu frame di ruang Hilbert H dengan batas frame A dan B, A≤ B. Maka

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |< f, \psi_j >|^2 \leq B\|f\|^2 \qquad f \in H.$$

Sementara itu,

$$\sum_{j \in J} |< f, \psi_j >|^2 = \sum_{j \in J} < f, \psi_j > \overline{< f, \psi_j >} = <(< f, \psi_j >), (< f, \psi_j$$

$$= < Ff, Ff > = < F^* F f, f >.$$

Akibatnya, $A\|f\|^2 = < AIf, f > \leq < F^*Ff, f > \leq < BIf, f > = B\|f\|^2$ atau $AI \leq F^*F \leq BI$.

Selanjutnya, karena A>0 dan $AI \leq F^* F \leq BI$, maka F*F operator positif. Sementara itu AI dan BI masing-masing operator positif terbatas dengan $(AI)^{-1} = A^{-1} I$ dan $(BI)^{-1} = B^{-1} I$. Akibatnya, $B^{-1} I \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1} I$. ■

Sekarang akan dikaji keluarga vektor $\{(F^*F)^{-1} \psi_j : j \in J\}$. Keluarga vektor ini ternyata membentuk frame, dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema 4 *Misalkan* $\{\psi_j : j \in J\}$ *suatu frame di ruang Hilbert* H *dengan batas frame* A *dan* B, A≤ B. *Maka* $\{\tilde{\psi}_j : j \in J\}$ *dengan* $\tilde{\psi}_j = (F^* F)^{-1} \psi_j$ *membentuk frame di* H *dengan batas frame* A^{-1} *dan* B^{-1}.

Bukti : Karena $(F^* F)^* = F^* F$ dan $I^* = I$, maka $((F^* F)^{-1})^* = (F^* F)^{-1}$. Akibatnya, untuk setiap f∈H kita peroleh

$$< f, \tilde{\psi}_j > = < f, (F^* F)^{-1} \psi_j >$$

$$= < ((F^* F)^{-1})^* f, \psi_j > = < (F^* F)^{-1} f, \psi_j >.$$

Dengan demikian,

$$\sum_{j\in J}\left|<f,\tilde{\psi}_j>\right|^2 =$$

$$\sum_{j\in J}\left|<(F^*F)^{-1} f,\psi_j>\right|^2$$

$$=$$

$$\sum_{j\in J}<(F^*F)^{-1} f,\psi_j>\overline{<(F^*F)^{-1} f,\psi_j>}$$

$$=$$

$$<(<(F^*F)^{-1} f,\psi_j>),(<(F^*F)^{-1} f,\psi_j>)>$$

$$= \; <F(F^*F)^{-1} f \,,\, F(F^*F)^{-1} f>$$

$$= \; <(F^*F)^{-1} f \,,\, F^*F(F^*F)^{-1} f> \; = \; <(F^*F)^{-1} f \,,\, f>$$

Selanjutnya, mengingat $B^{-1}I \le (F^*F)^{-1} \le A^{-1}I$, maka kita peroleh

$$B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{j\in J}\left|<f,\tilde{\psi}_j>\right|^2 \le A^{-1}\|f\|^2 \qquad f\in H.$$

Jadi, $\{\tilde{\psi}_j : j\in J\}$ membentuk frame di H dengan batas frame A^{-1} dan B^{-1}. ■

Definisi 3 Misalkan $\{\psi_j : j\in J\}$ suatu frame di ruang Hilbert H, F operator frame di H, dan F* operator adjoint untuk F. Keluarga vektor $\{\tilde{\psi}_j : j\in J\}$ dengan $\tilde{\psi}_j = (F^*F)^{-1}\psi_j$ disebut *frame dual* dari frame $\{\psi_j : j\in J\}$

Hubungan antara operator frame F dengan operator $\tilde{F}$ yang memetakan $f\in H$ ke barisan $(<f,\tilde{\psi}_j>)\in \ell^2(J)$, yakni

$$\tilde{F} : H \to \ell^2(J)$$

$$f \mapsto (<f,\tilde{\psi}_j>)$$

dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 5 *Misalkan* $\tilde{F}$ *operator frame untuk frame dual* $\{\tilde{\psi}_j : j\in J\}$ *dan* F *operator frame untuk frame* $\{\psi_j : j\in J\}$, *maka*

(1) $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$

(2) $\tilde{F}^*F = I = F^*\tilde{F}$

(3) $\tilde{F}F^* = F\tilde{F}^*$, *merupakan operator proyeksi ortogonal pada Range*(F) = *Range* ($\tilde{F}$).

Bukti:

(1) Ambil $f\in H$, maka $F(F^*F)^{-1}f = F((F^*F)^{-1}f)$
$= (<(F^*F)^{-1}f\,,\,\psi_j>) = (<f\,,(F^*F)^{-1}\psi_j>)$
$= (<f\,,\tilde{\psi}_j>) = \tilde{F}f.$
Jadi (1) telah terbukti.

(2) Ambil $f\in H$. Karena $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$, maka $\tilde{F}^*Ff = (F(F^*F)^{-1})^*Ff = (F^*F)^{-1}F^*Ff = If$ dan $F^*\tilde{F}f = F^*(F(F^*F)^{-1})f = If$.
Jadi (2) telah terbukti.

(3) Akan ditunjukkan bahwa:
 (a) $\tilde{F}F^*c = F\tilde{F}^*c$, $\forall\, c=(c_j)\in \ell^2(J)$.
 (b) Range (F) = Range ($\tilde{F}$).
 (c) $F\tilde{F}^*$ proyeksi ortogonal, yaitu $F\tilde{F}^*$ idempoten dan self adjoint.
 (d) Range ($\tilde{F}F^*$) = Range (F).

(a) Ambil $c=(c_j)\in \ell^2(J)$, maka $F\tilde{F}^*c = F(F(F^*F)^{-1})^*c = F(F^*F)^{-1})F^*c = \tilde{F}F^*c$.

(b) Ambil $c\in$ Range (F), maka $c = (<f\,,\psi_j>)$ untuk suatu $f\in H$ berlaku

$c = (<(F^*F)^{-1}g\,,\,\psi_j>) = (<g\,,(F^*F)^{-1}\psi_j>)$
$= (<g\,,\tilde{\psi}_j>) = \tilde{F}g\in$ Range ($\tilde{F}$).

Sehingga Range(F) $\subseteq$ Range ($\tilde{F}$).

Ambil $c=(c_j)\in$ Range ($\tilde{F}$), maka untuk suatu $f\in H$ berlaku

$c = (<f\,,\tilde{\psi}_j>) = (<f\,,(F^*F)^{-1}\psi_j>)$
$= (<(F^*F)^{-1}f\,,\psi_j>) =$
$= F((F^*F)^{-1}f)\in$ Range (F).

Sehingga Range ($\tilde{F}$) $\subseteq$ Range(F).

(c) Karena $F\tilde{F}^* = F(F(F^*F)^{-1})^* = F(F^*F)^{-1}F^*$, maka

$(F\tilde{F}^*)^2 = (F\tilde{F}^*)(F\tilde{F}^*)$
$= (F(F^*F)^{-1}F^*)(F(F^*F)^{-1}F^*)$
$= F(F^*F)^{-1}F^* = F\tilde{F}^*.$

Sehingga $F\tilde{F}^*$ operator idempoten.

Karena $F\tilde{F}^* = F(F^*F)^{-1}F^*$, maka

$(F\tilde{F}^*)^* = (F(F^*F)^{-1}F^*)^* = F^{**}(F(F^*F)^{-1})^*$
$= F(F^*F)^{-1}F^* = F\tilde{F}^*.$

Sehingga $F\tilde{F}^*$ operator self adjoint.

(d) Ambil $c=(c_j)\in$ Range (F), maka untuk suatu $f\in H$ berlaku

$c = (<f\,,\psi_j>) = (<f\,,(F^*F)(F^*F)^{-1}\psi_j>) = (<(F^*F)^*f\,,(F^*F)^{-1}\psi_j>) =$
$= (<F^*F f\,,\tilde{\psi}_j>) = \tilde{F}(F^*F f) = \tilde{F}F^*(Ff)\in$ Range ($\tilde{F}F^*$).

Sehingga Range(F) $\subseteq$ Range ($\tilde{F}F^*$).

Ambil $c=(c_j)\in$ Range ($\tilde{F}F^*$), maka untuk suatu $d=(d_j)\in \ell^2(J)$, berlaku

$$(c_j) = \tilde{F}F^*(d_j) = \tilde{F}\Big(\sum_{j\in J} d_j \psi_j\Big) = \Big(<\sum_{j\in J} d_j \psi_j, \tilde{\psi}_j>\Big)$$

$$= \Big(<\sum_{j\in J} d_j \psi_j, (F^*F)^{-1}\psi_j>\Big) = \Big(<\sum_{j\in J} d_j (F^*F)^{-1}\psi_j, \psi_j>\Big)$$

$$= \Big(<\sum_{j\in J} d_j \tilde{\psi}_j, \psi_j>\Big) = F\Big(\sum_{j\in J} d_j \tilde{\psi}_j\Big).$$

Karena $\{\tilde{\psi}_j : j\in J\}$ suatu frame di $L^2(\square)$, $(d_j)\in \ell^2(J)$, dan H lengkap, maka menurut teorema 2, $\sum_{j\in J} d_j \tilde{\psi}_j \in H$. Akibatnya $F(\sum_{j\in J} d_j \tilde{\psi}_j) \in \text{Range}(F)$. Sehingga $\text{Range}(\tilde{F}F^*) \subseteq \text{Range}(F)$.
Jadi (3) telah terbukti. ■

Selanjutnya, karena $\tilde{F}^*F = I = F^*\tilde{F}$ atau $\tilde{F}^*Ff = f = F^*\tilde{F}f$, setiap $f\in H$, yaitu

$$f = \sum_{j\in J} <f,\psi_j>\tilde{\psi}_j = \sum_{j\in J} <f,\tilde{\psi}_j>(F^*F)^{-1}\psi_j. \quad (2.2)$$

Apabila $\{\psi_j : j\in J\}$ suatu frame ketat, maka dari (2.1) dan (2.2) kita peroleh

$$f = \frac{1}{A}\sum_{j\in J} <f,\psi_j>\psi_j.$$

Walaupun rekonstruksi dengan frame tidak tunggal, tetapi frame memberikan rekonstruksi dengan koefisien rekonstruksi yang paling ekonomi, yaitu $f = \sum_{j\in J} <f,\tilde{\psi}_j>\psi_j$, seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 6 *Misalkan* H *ruang Hilbert,* $\{\psi_j : j\in J\}$ *suatu frame di* H, *dan* $f\in H$, *Jika* $f = \sum_{j\in J} c_j \psi_j$ *untuk suatu* $c=(c_j) \in \ell^2(J)$, *maka*

$$\sum_{j\in J} |c_j|^2 \geq \sum_{j\in J} |<f,\tilde{\psi}_j>|^2$$

Bukti : Misalkan $f\in H$ dan $f = \sum_{j\in J} c_j \psi_j$ untuk suatu $c=(c_j) \in \ell^2(J)$. Maka $f = F^*c$ dengan F menyatakan operator frame untuk $\{\psi_j : j\in J\}$. Karena $\tilde{F}F^* = F\tilde{F}^*$ merupakan operator proyeksi ortogonal pada $\text{Range}(\tilde{F}) = \text{Range}(F)$, tulis $c=a+b$ dengan $a\in \text{Range}(\tilde{F}) = \text{Range}(F)$ dan $b \perp \text{Range}(F)$, maka $\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$. Karena $a\in \text{Range}(\tilde{F})$, maka terdapat $g\in H \ni a = \tilde{F}g$, atau $c = \tilde{F}g + b$. Akibatnya $f = F^*c = F^*\tilde{F}g + F^*b$. Karena $b \perp \text{Range}(F)$, maka $<x,F^*b> = <Fx,b> = 0$, $\forall x\in H$. Atau $F^*b = 0$. Sementara itu $F^*\tilde{F} = I$, akibatnya $f=g$. Dengan demikian $c = \tilde{F}f + b$ dan

$$\sum_{j\in J}|c_j|^2 = \|c\|^2 = \|\tilde{F}f\|^2 + \|b\|^2 = \sum_{j\in J}|<f,\tilde{\psi}_j>|^2 + \|b\|^2$$

$$\geq \sum_{j\in J}|<f,\tilde{\psi}_j>|^2$$

Jadi, teorema 6 telah terbukti. ■

CONTOH REKONSTRUKSI DENGAN FRAME

Contoh 1 $\square^2$ merupakan ruang Hilbert yang berdimensi 2 atas $\square$. Perhatikan keluarga vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1=(0,1)$, $v_2=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ dan $v_3=(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

Misalkan $u=(a,b) \in \square^2$, maka kita peroleh

$$\sum_{j=1}^{3}|<u,v_j>|^2 = |b|^2 + \left|\frac{-a\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2}\right|^2$$

$$= |b|^2 + \frac{3}{4}|a|^2 + \frac{1}{4}|b|^2 + 2\text{Re}\left(\frac{-a\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\bar{b}}{2}\right)\right) + \frac{3}{4}|a|^2 + \frac{1}{4}|b|^2 + 2\text{Re}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\bar{b}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}(|a|^2 + |b|^2) = \frac{3}{2}\|u\|^2.$$

Ini berarti keluarga vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ membentuk frame ketat di $\square^2$, dengan batas frame 3/2. Dengan demikian, setiap $f\in \square^2$ dapat ditulis sebagai $f = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} <f,v_j>v_j$.

Selanjutnya karena $\sum_{j=1}^{3} v_j = 0$, maka kita juga peroleh $f=\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}[<f,v_j>+\alpha]v_j$ dengan $\alpha \in \square$, α sebarang.

Contoh 2 $\square^2$ merupakan ruang Hilbert yang berdimensi 2 atas $\square$. Perhatikan keluarga vektor $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dengan $v_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $v_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $v_3=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dan $v_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

Misalkan $x=(a,b) \in H$, maka kita peroleh $\sum_{j=1}^{4}|<x,v_j>|^2 = \|x\|^2$. Ini berarti keluarga vektor $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ membentuk frame ketat di $\square^2$, dengan batas frame 1.

Sehingga setiap $f \in \square^2$ dapat ditulis sebagai $f=\sum_{j=1}^{4}<f,v_j>v_j$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle,R.G., (1966) The Element of Integration, John Wiley & Son, New York.

Benedetto, J.J., (1996) Gabor Frames for L^2 and Related Space, dalam Wavelets: Mathematics and Applications, J.J. Benedetto and M.W. Frazier,Ed., CRC Press, Florida.

Cohen, A., Kovacevic, J., (1996) Wavelets: The Mathematical Background, Proceeding of The IEEE Vol. 84 No. 4.

Daubechies, I., (1992) Ten Lecture on Wavelets, Volume 61 of CBM SNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM Press Philadelphia, Pennsylvania.

Gunawan, H., (1997) Analisis Fourier dan Wavelets, Diktat Kuliah MA-ITB, Bandung.

Helmberg, G., (1969) Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, North-Holand Publishing Co., Amsterdam.

Heil, C.E., Walnut, D.F., (1989) Continuous and Discrete Wavelet Transform, SIAM Review, Vol 31 No. 4.

Kreyszig, E., (1978) An Introduction to Functional Analysis With Application, John Wiley & Son, New York.

Light, E., (1990) An Introduction to Abstract Analysis , Chapman and Hall London.

Pedersen, G.K., (1995) Analysis Now, Springer-Verlag, New York

Arnawa, I.M., (1999) Frame Gabor, Tesis Magister,ITB, Bandung.