RUANG VEKTOR BERDIMENSI DUA DARI LOKALISASI GELANGGANG SUKU BANYAK

Monika Rianti Helmi
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas Padang
Email : monikahelmi@yahoo.com

Abstrak

Daerah integral R dengan lapangan hasil bagi Q(R) dikatakan daerah Dedekind jika R merupakan gelanggang Noether, tertutup secara integral di Q(R) dan setiap ideal tak nol di R adalah ideal maksimal. Misalkan R daerah Dedekind dan $\langle f \rangle \subseteq R[X]$ adalah ideal prim yang bukan maksimal dan dibangun oleh satu unsur. Dan misalkan m ideal maksimal dari R[X] dan $mR[X]_m$ adalah ideal maksimal dari lokalisasi $R[X]$ di m, maka ruang vektor $mR[X]_m/(mR[X]_m)^2$ atas lapangan $R[X]_m/mR[X]_m$ adalah ruang vektor berdimensi dua.

Kata kunci : daerah dedekind, lokalisasi gelanggang

1. PENDAHULUAN

Lokalisasi gelanggang adalah metode sistematis dalam penyisipan suatu balikan himpunan multiplikatif ke dalam suatu gelanggang. Lokalisasi gelanggang R oleh S dinotasikan dengan $S^{-1}R$ atau R_S. Misalkan R daerah integral dengan lapangan hasil bagi $Q(R)$ dan $\mathfrak{p}$ adalah ideal prim dari R, maka lokalisasi gelanggang R di $\mathfrak{p}$ didefinisikan

$$R_\mathfrak{p} = \left\{\frac{r}{s} \in Q(R); r \in R \; dan \; s \in R \backslash \mathfrak{p}\right\}$$

Yang merupakan subgelanggang dari $Q(R)$ dan $R_\mathfrak{p}$ adalah gelanggang lokal dengan ideal maksimal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Dalam tulisan ini akan diperlihatkan bahwa suatu ruang vektor berdimensi dua dapat dibentuk dari lokalisasi gelanggang suku banyak dengan gelanggang sukubanyaknya merupakan suku banyak atas daerah Dedekind, yaitu gelanggang Noether yang tertutup secara integral dan setiap ideal primnya adalah ideal maksimal.

2. LOKALISASI GELANGGANG DAN DAERAH DEDEKIND

Lokalisasi Gelanggang

Misalkan R gelanggang komutatif, himpunan tak kosong $S \subseteq R$ dikatakan himpunan **multiplikatif** jika $1 \in S$ dan untuk setiap $a, b \in S$ mengakibatkan $ab \in S$.

Definisi 2.1. *Misalkan $f: R \longrightarrow B$ merupakan homomorfisma gelanggang yang memenuhi :*

1. *$f(x)$ adalah unit di B untuk setiap $x \in S$.*
2. *Jika $g: R \longrightarrow B'$ homomorfisma gelanggang dengan $f(x)$ adalah unit di B' untuk setiap $x \in S$ maka terdapat secara tunggal homomorfisma $h: B \longrightarrow B'$ dimana $g = hf$.*

B yang memenuhi sifat di atas disebut ***lokalisasi gelanggang R terhadap S.***

Definisikan

$$S^{-1}R = \left\{\frac{r}{s} \in Q(R); r \in R \ dan \ s \in S\right\}$$

Maka $S^{-1}R$ memenuhi sifat lokalisasi gelanggang. Pada B definisikan operasi

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$

dan

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Selanjutnya definisikan $f: R \longrightarrow S^{-1}R$ dengan $f(a) = \frac{a}{1}$, untuk setiap $a \in R$, maka f homomorfisma gelanggang.

Teorema 2.2. *(i). Semua ideal di R_S memiliki bentuk IR_S dengan I ideal dari R.*

(ii). Setiap ideal prim di R_S memiliki bentuk $\mathfrak{p}R_S$ dengan $\mathfrak{p}$ adalah ideal prim dari R dan tidak memuat anggota di S, dan sebaliknya $\mathfrak{p}R_S$ adah ideal prim di R_S untuk setiap $\mathfrak{p}$ ideal prim di R.

Bukti. Lihat [5]

Misalkan R gelanggang dengan $\mathfrak{p}$ ideal prim dari R. Misalkan $S = R\backslash\mathfrak{p}$. Maka S adalah himpunan multiplikatif dari R dan $S^{-1}R$ adalah lokalisasi gelanggang yang dinotasikan dengan $R_{\mathfrak{p}}$. Gelanggang $R_{\mathfrak{p}}$ memiliki karakteristik khusus seperti yang akan diperlihatkan pada teorema berikut.

Teorema 2.3. *(i). Misalkan $\mathfrak{p}$ ideal prim dari R yang termuat di $\mathfrak{p}$ dan himpunan ideal-ideal prim dari $R_{\mathfrak{p}}$.*

(ii). $R_{\mathfrak{p}}$ memiliki ideal maksimal yang unik

Bukti. Lihat [5]

$R_{\mathfrak{p}}$ merupakan gelanggang lokal dan disebut **lokalisasi gelanggang R di $\mathfrak{p}$.**

Daerah Dedekind

Daerah integral R dengan lapangan hasil bagi $Q(R)$ dikatakan **daerah Dedekind** jika R merupakan gelanggang Noether, tertutup secara integral di $Q(R)$ dan setiap ideal prim tak nol dari R adalah ideal maksimal.

Berikut ini merupakan beberapa sifat dari daerah Dedekind :

1. Setiap daerah ideal utama adalah daerah Dedekind
2. Setiap ideal tak nol dari R mempunyai balikan
3. Setiap ideal tak nol R merupakan perkalian sejumlah hingga ideal-ideal prim yang unik.

Lema 2.4. *Misalkan R adalah daerah Dedekind dengan tak berhingga ideal prim, maka tidak ada ideal maksimal dari $R[X]$ yang dibangun oleh satu unsur.*

Bukti. Lihat [3]

3. RUANG VEKTOR $mR[X]_m/(mR[X]_m)^2$ ATAS LAPANGAN $R[X]_m/mR[X]_m$

Sebelum membuktikan teorema-teorema utama, akan diberikan lema pendukung untuk pembuktian teorema utama.

Lema 3.1. *Misalkan R adalah daerah Dedekind dan $(f) \subset R[X]$ adalah ideal prim yang bukan maksimal dan dibangun oleh satu unsur. Misalkan $\mathfrak{m}$ adalah ideal maksimal dari $R[X]$. Jika lokalisasi dari $R[X]$ di $\mathfrak{m}$, maka $\mathfrak{m}R[X]_\mathfrak{m}$ adalah ideal maksimal dari $R[X]_\mathfrak{m}$ yang tidak dibangun oleh satu unsur.*

Bukti. Lihat [3]

Berikut ini adalah teorema-teorema utama dalam tulisan ini.

Teorema 3.2. *Misalkan R adalah daerah Dedekind dan $(f) \subset R[X]$ adalah ideal prim yang bukan maksimal dan dibangun oleh satu unsur. Misalkan $\mathfrak{m}$ adalah ideal maksimal dari $R[X]$. Jika $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \cap R$ dan $R_\mathfrak{q}$ adalah lokalisasi R di $\mathfrak{q}$, maka $\mathfrak{q}$ adalah ideal prim tak nol dari R.*

Bukti. Misalkan $xy \in \mathfrak{m} \cap R$. Karena $\mathfrak{m}$ ideal prim maka $xy \in \mathfrak{m}$ mengakibatkan $x \in \mathfrak{m}$ atau $y \in \mathfrak{m}$. Jadi $x \in \mathfrak{m} \cap R$ atau $y \in \mathfrak{m} \cap R$. Jadi q adalah ideal prim dari R. Andaikan $\mathfrak{q} = 0$, maka $R_\mathfrak{q}$ adalah lapangan, akibatnya $R_\mathfrak{q}[X]$ adalah daerah integral. Selanjutnya akan dibuktikan $R[X]_\mathfrak{m}$ adalah lokalisasi dari $R_\mathfrak{q}[X]$. Dengan kata lain, terdapat $\mathfrak{s}$ ideal prim dari $R_\mathfrak{q}[X]$ sedemikian sehingga $R[X]_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{q}[X]_\mathfrak{s}$

Definisikan pemetaan

$$\sigma: R[X] \to R_\mathfrak{q}[X]$$

Dengan $\sigma(g(x)) = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{1}x + \frac{a_2}{1}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{1}x^n$

Akan dibuktikan $\mathfrak{s} = \{ \sigma(g(x)) \in R_q[X] : g(x) \in \mathfrak{m}\}$ adalah ideal maksimal dari $R_\mathfrak{q}[X]$. Ambil $g_1(x), g_2(x) \in \mathfrak{m}$ sebarang, maka

$$\sigma\big(g_1(x)\big) + \sigma\big(g_2(x)\big)$$

$$= \left(\frac{a_{10}}{1} + \frac{a_{11}}{1}x + \frac{a_{12}}{1}x^2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{1}x^n\right) + \left(\frac{a_{20}}{1} + \frac{a_{21}}{1}x + \frac{a_{22}}{1}x^2 + \cdots + \frac{a_{2n}}{1}x^n\right)$$

$$= \left(\frac{a_{10+}a_{20}}{1}\right) + \left(\frac{a_{11+}a_{21}}{1}\right)x + \cdots + \left(\frac{a_{1n+}a_{2n}}{1}\right)x^n \in \mathfrak{s}$$

Ambil $h(x) \in R[X]$, maka

$$h(x)\sigma\big(g_1(x)\big) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)\left(\frac{a_{10}}{1} + \frac{a_{11}}{1}x + \frac{a_{12}}{1}x^2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{1}x^n\right)$$

$$= \sum_{i,j}^{n} \frac{a_{1i}b_j}{1}x^{i+j} \in \mathfrak{s}$$

Jadi, $\mathfrak{s}$ adalah ideal dari $R_{\mathfrak{q}}[X]$. Andaikan terdapat ideal lain di $R_{\mathfrak{q}}[X]$, misalkan $\mathfrak{a}$, sedemikian sehingga $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{s}$. Misalkan $\mathfrak{b}$ adalah ideal dari $R[X]$ yang dipetakan ke $\mathfrak{a}$. Ambil $r(x) \in \mathfrak{m}$, maka $\sigma(r(x)) \in \mathfrak{s}$. Karena $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{a}$, maka $\sigma(r(x)) \in \mathfrak{a}$. Akibatnya $(r(x)) \in \mathfrak{b}$ untuk setiap $r(x) \in \mathfrak{m}$. Dengan kata lain $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{b}$, kontradiksi dengan $\mathfrak{m}$ adalah ideal maksimal. Jadi $\mathfrak{s}$ adalah ideal maksimal.Misalkan $\mathfrak{p}$ ideal ideal maksimal dari $R_{\mathfrak{q}}[X]$, maka dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $\mathfrak{d} = \{h(x) \in R[X]; \sigma(h(x)) \in \mathfrak{p}\}$ adalah ideal maksimal dari $R[X]$.

Kemudian dengan mendefinisikan

$$R_{\mathfrak{q}}[X]_{\mathfrak{s}} = \left\{\frac{u(x)}{v(x)}; u(x) \in R_{\mathfrak{q}}[X]\ dan\ v(x) \notin \mathfrak{s}\right\}$$

Dapat dibuktikan bahwa $R[X]_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{q}}[X]_{\mathfrak{s}}$

Karena $R[X]_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{q}}[X]_{\mathfrak{s}}$, akibatnya, ideal maksimal dari $R[X]_{\mathfrak{m}}$ dibangun oleh satu unsur. Hal ini kontradiksi dengan $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$ adalah ideal yang tidak dibangun oleh satu unsur. Jadi, $\mathfrak{q}$ adalah ideal prim tak nol dari daerah Dedekind R.■

Teorema berikut ini akan memperlihatkan bahwa $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ merupakan sebuah ruang vektor berdimensi dua.

Teorema 3.3 : *Misalkan R adalah Dedekind dan $\mathfrak{m}$ ideal maksimal dari $R[X]$, maka ruang vektor $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ atas lapangan $R[X]_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$ adalah ruang vektor berdimensi dua.*

Bukti. Dari [..] telah dibuktikan bahwa $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$ adalah ideal maksimal $R[X]_{\mathfrak{m}}$ yang tidak dibangun oleh satu unsur. $R_{\mathfrak{q}}$ adalah gelanggang valuasi diskrit dengan ideal maksimal $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} = \langle q \rangle$ dengan q unsur prim di R. Selanjutnya dari [2] diperoleh bahwa $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$ dibangun oleh q dan g, dengan g adalah faktor tak tereduksi dari peta f di $(R/\mathfrak{q})[X] = R_{\mathfrak{q}}/\langle q \rangle[X]$.

Misalkan $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}} = \langle q, g \rangle$ dan $x \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$, maka

$$x = aq + bg; \text{ dengan } a, b \in R[X]_{\mathfrak{m}}, \text{ dan } q, g \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$$

Akan diperlihatkan bahwa $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ dibangun oleh $\{q + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2, g + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2\}$. Ambil sebarang $x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ dengan $x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 \neq 0$. Akibatnya, kita punya

$$x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 = aq + bg + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$$

Sehingga,

$$x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 = (aq + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2) + (bg + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2)$$

$$\begin{aligned} x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 \\ &= (a + \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})(q + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2) + (b + \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})(g \\ &+ (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2) \end{aligned}$$

Dengan $a, b \notin \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$. Andai $a, b \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$, maka

$$x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 = aq + bg + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$$

Hal ini kontradiksi dengan $x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 \neq 0$. Jadi haruslah $a, b \notin \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$. Karena $x + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ sebarang, akibatnya $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ dibangun oleh $\{(q + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2), (g + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2)\}$

Sekarang, pandang kombinasi linier

$$(u + \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})(q + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2) + (v + \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})(g + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 = 0$$

$$uq + vg + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2 = (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$$

$$uq + vg \in (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$$

Akan dibuktikan $u, v \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$. Andaikan $u, v \notin \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$. Karena $q, g \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$, tetapi $q, g \notin (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$, maka $uq + vg \notin (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$. Kontradiksi dengan $uq + vg \in (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$. Haruslah , $u, v \in \mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$. Jadi $\{(q + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2), (g + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2)\}$ adalah himpunan bebas linier. Sehingga $\{(q + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2), (g + (\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2)\}$ adalah basis dari ruang vector $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$. Jadi $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}})^2$ adalah ruang vektor berdimensi dua atas lapangan $R[X]_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$. ■

4. KESIMPULAN

Teorema utama dalam tulisan ini dapat digunakan untuk membuktikan teorema utama dalam tulisan Hillman [..], yaitu, jika R adalah daerah Dedekind dan f membangun ideal prim dari $R[X]$ yang tidak maksimal, maka daerah $R[X]/(f)$ adalah daerah Dedekind jika dan hanya jika f tidak termuat di kuadrat sebarang ideal maksimal dari $R[X]$.

REFERENSI

1. D.A. Passman, *A Course in Ring Theory*, Wadsworth Inc, 1991.
2. J.A. Hillman, Polynomial Determining Dedekind Domain, *Bull. Austral. Math. Soc*, 29, 167-175, 1984.
3. M.R. Helmi, Polynomial Over a Dedekind Domain, Procedings of IICMA, Yogyakarta, 2009.
4. T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.
5. Matsumura, Hideyuki, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986

Monika Rianti Helmi : Algebra Research Group FMIPA Unand, Padang

E-Mail : monika_helmi@fmipa.unand.ac.id.