Aplikasi Pewarnaan Graf pada Permainan Sudoku

Narwen

Jurusan Matematika FMIPA Unand

Permainan Sudoku dengan ukuran $n^2 \times n^2$ dapat diselesaikan dengan menggunakan pewarnaan graf. Sudoku tersebut terlebih dahulu dirubah menjadi graf Sudoku yang mempunyai titik $n^2 \times n^2$ dan masing-masing titik diberi label bilangan dari 1, 2, 3, sampai dengan $n^2 \times n^2$. Sedangkan sisi dari graf Sudoku itu adalah sisi-sisi yang sesuai dengan aturan-aturan yang berlaku dalam graf Sudoku. Graf Sudoku yang diperoleh adalah graf regular yang mempunyai derajat $3n^2 - 2n - 1$. Mengaplikasikan pewarnaan graf, khususnya pewarnaan titik, pada graf Sudoku dan kemudian akan dapat mencari solusi dari permainan Sudoku tersebut. Bilangan kromatik yang diperoleh adalah n^2.

Kata Kunci : *Permainan Sudoku, Graf Sudoku, Pewarnaan Graf, Graf Regular, Bilangan Kromatik.*

1. Pendahuluan

Graf merupakan salah satu model matematika yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan melihat keterkaitan atau hubungan diantara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik dan hubungan antara objek-objek dinayatakan sebagai sisi.

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi-sisi yang menghubungkan sepasang titik. Dua buah titik pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya bersisian dengan sebuah sisi.

Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Sedangkan untuk sebarang sisi, jika sisi $e = (u, v)$, maka sisi e dikatakan bersisian dengan titik u dan titik v. Graf regular adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama.

Salah satu aplikasi yang digunakan dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Masalah pewarnaan graf, dalam hal ini adalah pewarnan titik, adalah bagaimana memberikan warna terhadap semua titik pada graf tersebut sehingga tidak ada titik-titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Hal ini biasanya dikaitkan dengan penggunaan warna yang seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai semua titik pada suatu graf G dinamakan bilangan kromatik dari graf G tersebut. Pewarnaan graf memiliki banyak aplikasi diantaranya adalah masalah penjadawalan, aliran kerja dalam proyek, pencocokan pola dan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah permainan Sudoku.

2. Permainan Sudoku

Nama Sudoku berasal dari bahasa Jepang yaitu " *Suuji wa dokhusin ni kagiru*" yang berarti angka-angkanya harus tunggal. Permainan Sudoku adalah sebuah permainan teka-teki angka yang berbasis logika. Teka-teki ini diciptakan oleh Howard Gams. Versi modern permainan ini dimulai di Indianapolis pada tahun 1979 dan pertama kali diterbitkan di sebuah surat kabar Perancis pada tahun 1985, kemudian menjadi terkenal kembali dan menjadi popular di Jepang pada tahun 1986, ketika penerbit Nikoli menemukan teka-teki ini.

Sudoku sebenarnya mempunyai ukuran yang bervariatif tetapi ukuran Sudoku yang paling umum adalah berukuran $n^2 \times n^2$ dengan $n \geq 2$. Tujuan dari permainan Sudoku ini adalah mengisikan bilangan satu sampai dengan bilangan n^2 ke dalam matrik bujursangkar berukuran $n^2 \times n^2$. Matrik Bujursangkar berukuran $n^2 \times n^2$ tersebut memuat sebanyak n^2 sub-matrik bujursangkar berukuran $n \times n$ tanpa ada bilangan yang sama dari suatu baris, kolom, dan sub-matrik bujursangkar berukuran $n \times n$ tersebut.

Secara umum, permainan Sudoku dapat diselesaikan dengan kombinasi teknik pemindaian (*scanning*), penandaan (*marking*) dan analisis (*analyzing*). Pemindaian adalah suatu proses melihat baris dan kolom untuk mengindentifikasi baris atau kolom mana dalam suatu blok yang terdapat bilangan-bilangan tertentu. Proses ini kemudian diulang pada setiap baris atau kolom secara sistematis. Penandaan adalah suatu proses analisa logika untuk menandai kandidat-kandidat bilangan yang dapat dimasukan dalam sebuah elemen dan kemudian menentukan nilai-nilai yang tidak mungkin. Analisa adalah suatu proses eliminasi kandidat dimana kemajuan dicapai dengan mengeliminasi kandidat bilangan secara berturut-turut hingga sebuah elemen hanya mempunyai satu kandidat.

Sebagai contoh, untuk $n = 3$, diperoleh Sudoku dengan ukuran 9×9. Misalkan diberikan nilai awal dari permainan Sudoku berukuran 9×9 tersebut dalam bentuk table berikut ini.

		1	3	8			4	
5	4	6			1		2	
6						4	9	
4		5		3		8		1
	3	9						6
	7		8			6	3	4
	6			4	3	7		

Akan dilakukan iterasi dan menerapkan ketiga teknik penyelesaian permainan Sudoku di atas untuk mengisi elemen yang kosong dari bentuk Sudoku tersebut.

Iterasi 1.

Teknik Pemindaian. Untuk *elemen Sudoku (1,1)*, pada baris pertama, bilangan yang sudah ada adalah 1, 3, 4 dan 8, dan pada kolom pertama adalah 4, 5 dan 6. Sedangkan pada sub-matrik (1,2,3)× (1,2,3) bilangan yang sudah ada adalah 1, 4, 5 dan 6. Karena itu, dengan **proses penandaan** bilangan dari 1 sampai dengan 9 yang mungkin untuk elemen Sudoku (1,1) adalah 2, 7 atau 9. Untuk *elemen Sudoku (1,2)*, pada baris pertama, bilangan yang sudah ada adalah 1, 3, 4 dan 8, dan pada kolom kedua adalah 3, 4, 6 dan 7. Sedangkan pada sub-matrik (1,2,3)× (1,2,3) bilangan yang sudah ada adalah 1, 4, 5 dan 6. Karena itu, dengan proses penandaan bilangan dari 1 sampai dengan 9 yang mungkin untuk elemen Sudoku (1,2) adalah 2, 5 atau 9. Untuk *elemen Sudoku (7,3)*, pada baris ketujuh, bilangan yang sudah ada adalah 3, 4, 6, 7 dan 8, dan pada kolom ketiga adalah 1, 5, 6 dan 9. Sedangkan pada sub-matrik (1,2,3)× (7,8,9) bilangan yang sudah ada adalah 6 dan 7. Karena itu, dengan proses penandaan bilangan dari 1 sampai dengan 9 yang mungkin untuk elemen Sudoku (7,3) adalah 2. Kedua teknik tersebut dilakukan terhadap elemen-elemen matrik lainnya yang belum berisi angka, sehingga diperoleh hasil berikut,

2 7 9	2 9	1	3	8	2 5 6 7 9	5 9	4	5 7 9
5	4	6	7 9	7 9	1	3 9	2	3 7 8 9
2 3 7 8 9	2 8 9	2 3 7 8	2 4 5 6 7 9	2 5 6 7 9	2 4 5 6 7 9	1 3 5 9	1 5 6 7 8	3 5 7 8 9
6	1 2 8	2 7 8	1 2 5 7	1 2 5 7	2 5 7 8	4	9	2 3 5 7
4	2	5	2 6 7 9	3	2 6 7 9	8	7	1
1 2 7 8	3	9	1 2 4 5 7	1 2 5 7	2 4 5 7 8	2 5	5 7	6
1 2 3 8 9	1 2 5 8 9	2 3 4 8	1 2 5 6 7 9	1 2 5 6 7 9	2 5 6 7 9	1 2 5 9	1 5 8	2 5 8 9
1 2 9	7	2	8	1 2 5 9	2 5 9	6	3	4
1 2 8 9	6	2 8	1 2 5 9	4	3	7	1 5 8	2 5 8 9

Teknik analisa dilakukan terhadap elemen Sudoku, yaitu elemen yang isinya bilangan tunggal. Dalam hal ini elemen Sudoku (5,2) berisi bilangan 2, elemen Sudoku (7,3) berisi bilangan 2 dan elemen Sudoku (5,8) berisi bilangan 7. Akibatnya isi dari Sudoku tersebut adalah,

Tabel 1.

		1	3	8			4	
5	4	6			1		2	
6						4	9	
4	2	5		3		8	7	1
	3	9						6
	7	2	8			6	3	4
	6			4	3	7		

Tabel 2

	9	1	3	8			4	
5	4	6			1		2	
6						4	9	
4	2	5		3		8	7	1
	3	9					5	6
	7	2	8			6	3	4
	6	8		4	3	7		

Iterasi 2. Dengan cara yang sama dan matrik Sudoku hasil pada iterasi 1 sebagai input maka diperoleh hasil pada iterasi kedua seperti terlihat pada tabel 2. Bila dilanjutkan iterasinya, maka untuk iterasi 3, iterasi 4 sampai dengan iterasi 13 diperoleh hasilnya berturut-turut sebagai berikut:

	9	1	3	8		5	4	7
5	4	6			1		2	
	8	3					6	
6	1	7				4	9	3
4	2	5		3		8	7	1
	3	9				2	5	6
						9	8	
	7	2	8			6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	

Iterasi 3

	9	1	3	8		5	4	7
5	4	6			1		2	
	8	3					6	
6	1	7				4	9	3
4	2	5		3		8	7	1
	3	9				2	5	6
						9	8	
	7	2	8			6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	

Iterasi 4

2	9	1	3	8		5	4	7
5	4	6			1	3	2	
	8	3				1	6	9
6	1	7				4	9	3
4	2	5		3		8	7	1
8	3	9				2	5	6
	5	4				9	8	
1	7	2	8			6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	

Iterasi 5

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6			1	3	2	8
7	8	3				1	6	9
6	1	7				4	9	3
4	2	5		3		8	7	1
8	3	9				2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8			6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	

Iterasi 6

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6			1	3	2	8
7	8	3				1	6	9
6	1	7				4	9	3
4	2	5		3	9	8	7	1
8	3	9				2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8			6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	

Iterasi 7

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6			1	3	2	8
7	8	3				1	6	9
6	1	7				4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9				2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8		5	6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	

Iterasi 8

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6			1	3	2	8
7	8	3				1	6	9
6	1	7				4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9				2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8		5	6	3	4
9	6	8		4	3	7	1	5

Iterasi 9

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6		7	1	3	2	8
7	8	3				1	6	9
6	1	7	5			4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9				2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Iterasi 10

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6	9	7	1	3	2	8
7	8	3	4			1	6	9
6	1	7	5	2		4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9		1		2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Iterasi 11

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6	9	7	1	3	2	8
7	8	3	4	5	2	1	6	9
6	1	7	5	2	8	4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9	7	1		2	5	6
3	5	4				9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Iterasi 12

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6	9	7	1	3	2	8
7	8	3	4	5	2	1	6	9
6	1	7	5	2	8	4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9	7	1	4	2	5	6
3	5	4	1	6	9	9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Iterasi 13

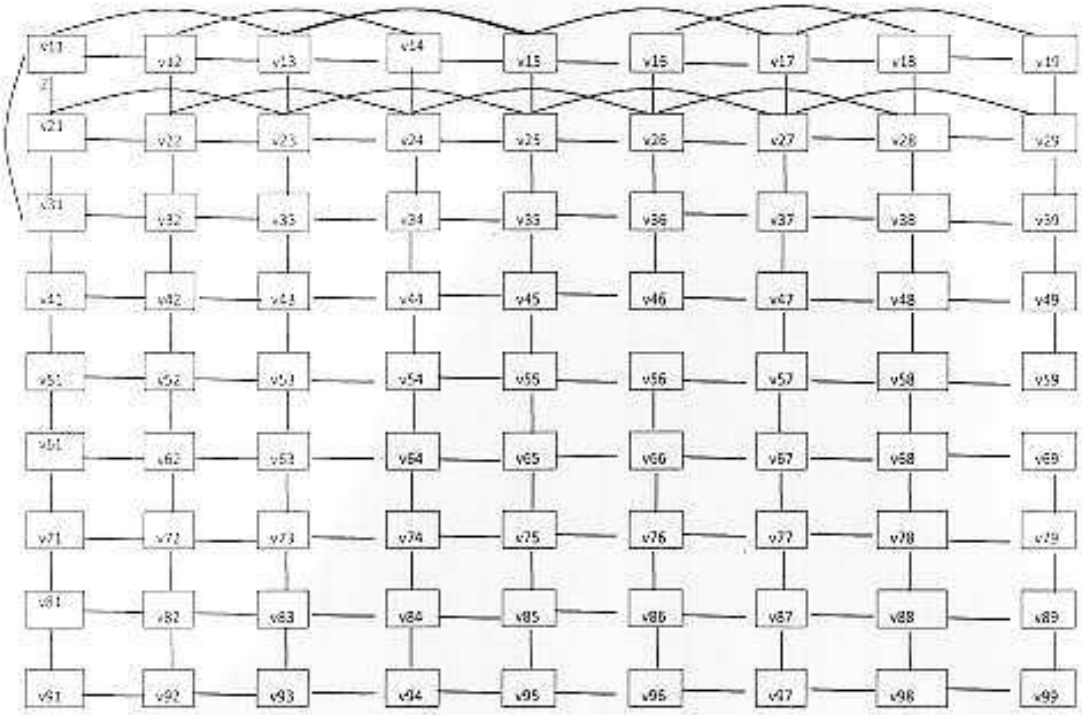
Hasil pada iterasi 13 merupakan jawaban untuk masalah permainan Sudoku yang diberikan.

3. Pewarnaan Graf pada Permainan Sudoku.

Permainan Sudoku merupakan salah satu aplikasi dalam masalah pewarnaan graf dan memiliki aspek kombinatorik yang menarik. Permainan Sudoku dapat diselesaikan dengan teori graf, khususnya masalah pewarnaan titik. Sudoku dengan ukuran $n^2 \times n^2$ dengan $n \geq 2$ dapat diwarnai dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah pertama, rubah masalah Sudoku ke dalam bentuk graf dimana bilangan-bilangan setiap elemen merupakan titik-titik dari graf Sudoku dan dilambangkan dengan $v_{i,j}$ dimana $1 \le i, j \le n^2$. Titik $v_{i,j}$ dan $v_{i',j'}$ dikatakan bertetangga jika $i = i'$ atau $j = j'$ atau $\left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{i'}{n} \right\rceil$ dan $\left\lceil \frac{j}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{j'}{n} \right\rceil$ yang dihubungkan oleh sebuah sisi. Sisi-sisi ini dipandang sebagai relasi dari setiap elemen-elemen bilangan pada Sudoku. Graf Sudoku yang terbentuk adalah graf regular dengan derajat $3n^2 - 2n - 1$. *Langkah kedua,* memberikan warna pada setiap titik-titik graf Sudoku. Caranya adalah berikan warna tertentu terhadap suatu titik kemudian cari titik lain yang tidak bertetangga dengan titik tersebut dan diberikan warna yang sama. Pencarian dilanjutkan pada titik lain yang belum diberi warna dan lakukan proses yang sama sehingga semua titik sudah terwarnai dengan tepat. Langkah ketiga adalah merubah kembali graf Sudoku yang sudah diwarnai ke dalam bentuk permainan Sudoku, yaitu warna pada graf Sudoku dirubah manjadi bilangan pada permainan Sudoku. Sebagai contoh untuk permainan Sudoku untuk n = 3, dengan nilai awal diberikan seperti tabel 1.

Langkah pertama, rubah masalah Sudoku di atas ke dalam bentuk graf Sudoku sehingga diperoleh graf Sudoku dengan 9×9 titik, yaitu titik-titik $v_{i,j}$ dengan $1 \le i, j \le 9$. Titik $v_{i,j}$ dan $v_{i',j'}$ akan terhubung oleh sebuah sisi jika $i = i'$ atau $j = j'$ atau $\left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{i'}{3} \right\rceil$ dan $\left\lceil \frac{j}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{j'}{3} \right\rceil$. Akibatnya diperoleh graf Sudoku berbentuk graf regular dengan derajat 20.



Langkah kedua, Beri warna untuk setiap titik dari graf Sudoku yang berukuran 9×9. Karena graf sudoku yang terjadi adalah graf regular dengan derajat 20, maka pewarnaan dapat dimulai dari titik mana saja. Berdasarkan nilai awal permainan Sudoku yang diberikan, maka diperoleh warna titik graf Sudoku yang bersesuaian dengan permainan tersebut adalah sebagai berikut,

Titik-titik $v_{1,3}$, $v_{2,6}$, dan $v_{5,9}$ diberikan warna 1. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{1,1}$, $v_{4,2}$, $v_{6,5}$, $v_{7,4}$, $v_{8,1}$, $v_{9,8}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut juga diberi warna 1.

Titik-titik $v_{2,8}$ diberikan warna 2. Karena titik $v_{2,8}$ tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{1,2}$, $v_{3,6}$, $v_{4,3}$, $v_{5,2}$, $v_{6,7}$, $v_{7,9}$, $v_{8,3}$, $v_{9,4}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga, maka titik-titik tersebut diberi warna 2.

Titik-titik $v_{1,4}$, $v_{5,5}$, $v_{6,2}$, $v_{8,8}$ dan ,$v_{9,5}$ diberikan warna 3. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{2,7}$, $v_{3,3}$, $v_{4,9}$, $v_{7,1}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut juga diberi warna 3.

Titik-titik $v_{1,8}$, $v_{2,2}$, $v_{4,7}$, $v_{5,1}$, $v_{8,9}$ dan $v_{9,5}$ diberikan warna 4. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{3,4}$, $v_{6,6}$, $v_{7,3}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut juga diberi warna 4.

Titik-titik $v_{2,1}$ dan $v_{5,3}$ diberikan warna 5. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{1,7}$, $v_{3,7}$, $v_{4,4}$, $v_{6,8}$, $v_{7,2}$, $v_{8,4}$, $v_{9,9}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut juga diberi warna 5.

Titik-titik $v_{2,3}$, $v_{4,1}$, $v_{6,9}$, $v_{8,7}$ dan $v_{9,2}$ diberikan warna 6. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{1,6}$, $v_{3,8}$, $v_{5,4}$,$v_{7,5}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut diberi warna 6.

Titik-titik $v_{5,7}$ dan $v_{9,7}$ diberikan warna 7. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{1,9}$, $v_{2,5}$, $v_{3,1}$, $v_{4,3}$, $v_{5,8}$ $v_{5,4}$, $v_{7,6}$, dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut diberi warna 7.

Titik-titik $v_{1,5}$, $v_{5,6}$ dan $v_{8,4}$ diberikan warna 8. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{2,1}$, $v_{3,5}$, $v_{4,4}$, $v_{5,1}$, $v_{7,8}$, $v_{9,3}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga maka titik-titik tersebut juga diberi warna 8.

Titik-titik $v_{4,8}$ dan $v_{6,3}$ diberikan warna 9. Karena titik-titik ini tidak bertetangga dengan titik-titik $v_{1,2}$,$v_{2,4}$, $v_{3,9}$, $v_{5,6}$, $v_{7,7}$, $v_{8,5}$, $v_{9,1}$ dan diantara titik ini juga tidak bertetangga, maka titik-titik tersebut juga diberi warna 9.

Langkah ketiga, rubah kembali graf Sudoku yang diberi warna tersebut ke dalam bentuk permainan Sudoku, dimana warna-i adalah angka i, i = 1,2,3, ..., 9 sehingga diperoleh solusi untuk permainan Sudoku sebagai berikut,

2	9	1	3	8	6	5	4	7
5	4	6	9	7	1	3	2	8
7	8	3	4	5	2	1	6	9
6	1	7	5	2	8	4	9	3
4	2	5	6	3	9	8	7	1
8	3	9	7	1	4	2	5	6
3	5	4	1	6	9	9	8	2
1	7	2	8	9	5	6	3	4
9	6	8	2	4	3	7	1	5

Sama dengan hasil yang diperoleh pada table 1.3.

4. Referensi.

1. Crook, J.F. 2009, A pencil and paper algorithm for solving Sudoku puzzles, Notices of the AMS, 56(4):460-468

2. Davis, Tom, 2008, The Mathematics of Sudoku, http:/www.geometer.org/mathecircles/Sudoku.pdf
3. Harberg, Agnes M and M. Ram Murty, 2007, Sudoku Squares and chromatics polynomials, Notices of the AMS,54(6):704-717
4. Munir, Rinaldi, 2005, Matematika Diskrit, Edisi Ketiga, Informatika, Bandung
5. Rosen, Kenneth H, 2003, Discrete Mathematics and It's Applications, Fifth Edition, McGraw-Hill, New York.