Karakteristik Primitif-M atas Fungsi Terintegral-M pada sel $E \subset R^n$

Jenizon dan Haripamyu,
Jurusan Matematika FMIPA Unand

ABSTRAK

Misalkan f fungsi terintegral McShane (Terintegral-M) pada sel $E \subset R^n$. Koleksi semua sel bagian sel E dilambangkan dengan E.
Jika G fungsi interval terdefinisi pada E dan untuk setiap sel $I \subseteq E$, $G(I)$ merupakan nilai integral-M fungsi f pada sel I maka G disebut primitif integral McShane f (primitif-f) pada sel E. Dalam tulisan ini akan dibahas karakteristik primitif-M atas fungsi terintegral-M pada sel E.

I. PENDAHULUAN

Pfeffer (1993) menyusun teori integral McShane pada ruang Euclide R^n (bernilai ril) dengan menggunakan persekitaran berupa kubus (cubes) dan volume yang digunakan berupa fungsi volume yang bersifat umum (aditif dan non negatif). Berikut ini disajikan definisi dan beberapa sifat dasar integral McShane fungsi yang terdefinisi pada sel $E \subset R^n$. Ruang R^n merupakan ruang bernorma terhadap norma $\| \ \|_\infty : \left|\overline{x}\right|_\infty = \underset{1 \le i \le n}{maks} |x_i|$.

Koleksi sel dikatakan tidak saling tumpang tindih (non overlapping) jika interior-interior sel tersebut saling asing. Berikut ini beberapa sifat interval dan sel. Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sel-sel yang tidak saling tumpang tindih di dalam sel $E \subset R^n$ dan $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_p}$ di dalam E. Himpunan pasangan sel titik D = $\{(A, \overline{x})\}$ = $\{(A_1, \overline{x_1}), (A_2, \overline{x_2}), \ldots, (A_p, \overline{x_p})\}$ disebut partisi Lebesgue di dalam (pada) $E \subset R^n$ jika $\bigcup_{i=1}^{p} A_i \subset E \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i = E \right)$.

(i) Jika $D = \{(A, \overline{x})\}$ partisi Lebesgue di dalam (pada) E dengan $\overline{x_i} \in A_i$ untuk setiap i maka D disebut partisi Perron di dalam (pada) E.

(ii) Jika δ fungsi positif pada E, $D = \{(A, \overline{x})\}$ partisi Lebesgue di dalam (pada) E dengan $A_i \subset B(\overline{x_i}, \delta(\overline{x_i}))$ untuk setiap i maka D disebut partisi Lebesgue (McShane) δ-fine di dalam (pada) E.

Titik $\overline{x}$ dengan $(I, \overline{x}) \in D$ disebut titik terkait (associated point) dan I disebut selang δ-fine dengan titik terkait $\overline{x}$. Untuk selanjutnya yang digunakan di dalam tulisan ini adalah partisi McShane δ-fine. Untuk setiap fungsi positif δ pada sel $E \subset R^n$ terdapat partisi δ-fine pada E.

Fungsi $f: E \subset R^n \to R$ dikatakan terintegral McShane pada E jika terdapat bilangan $S \in R$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \overline{\xi})\} = \{(I_1, \overline{\xi_1}), (I_2, \overline{\xi_2}), \ldots, (I_q, \overline{\xi_q})\}$ pada E berlaku

$\left|(D)\sum f(\overline{\xi})\mu(I) - S\right| = \left|\sum_{i=1}^{q} f(\overline{\xi})\mu(I) - S\right| < \varepsilon$ dengan $\mu(I)$ menyatakan ukuran Lebesgue pada sel I.

Fungsi $f: E \to R$ terintegral McShane pada himpunan terukur $A \subset E$ jika $f\chi_A$ terintegral McShane pada E dengan χ_A fungsi karakteristik pada A. Koleksi semua fungsi terintegral McShane pada sel E dilambangkan dengan $M(E)$. Selanjutnya $S \in R$ yang dimaksud dalam Definisi 7 disebut nilai integral McShane fungsi f pada $E \subset R^n$ dan ditulis $S = (M)\int_E f$. Jika $f, g : E \to R$ terintegral McShane pada sel $E \subset R^n$ dan c suatu skalar, maka $f + g$ dan cf terintegral McShane pada E dan

$(M)\int_E (f+g) = (M)\int_E f + (M)\int_E g$ dan $(M)\int_E cf = c\left((M)\int_E f\right)$.

Fungsi $f: E \to R$ terintegral McShane pada sel E jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi McShane δ-fine $P_1 = \{(I, \bar{\xi})\}$ dan $P_2 = \{(J, \bar{\xi})\}$ pada E berlaku

$$\left|(P_1)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - (P_2)\sum f(\bar{\xi})\mu(J)\right| < \varepsilon$$

Jika f terintegral McShane pada sel E_1 dan E_2 di dalam R^n yang tidak saling tumpang tindih dan $E = E_1 \cup E_2$, maka f terintegral McShane pada E dan $(M)\int_E f = (M)\int_{E_1} f + (M)\int_{E_2} f$.

Pada tahun 1994, Gordon membuktikan bahwa untuk fungsi bernilai ril, integral Lebesgue ekuivalen dengan integral McShane. Dengan menggunakan hasil tersebut, Guoju dan Schwabik (2002) membandingkan integral Lebesgue-Pettis dengan integral McShane fungsi yang memetakan interval di dalam R^n ke ruang Banach X.

Berdasarkan definisi dan sifat-sifat yang telah diuraikan dibangun definisi integral McShane-Pettis sebagai berikut

Diberikan sel $E \subset R^n$. Fungsi $f: E \to R$ dikatakan terintegral McShane-Pettis jika untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A sehingga $x^*(x_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f)$.

Jika f terintegral McShane-Pettis pada E yaitu untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A memenuhi $x^*(x_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f)$, maka nilai $x_{(f,A)}$ tunggal.

Koleksi semua fungsi terintegral McShane-Pettis pada E dilambangkan dengan $MP(E)$. Selanjutnya vektor $x_{(f,A)} \in X$ yang dimaksuddisebut nilai integral McShane-Pettis fungsi f pada $A \subset E$ dan ditulis $x_{(f,A)} = (\mathrm{MP})\int_A f$.

Jadi $x^*(x_{(f,A)}) = x^*((MP)\int_A f) = (M)\int_A x^*(f)$.

Jika E_1 dan E_2 sel-sel tidak saling tumpang tindih, $f \in MP(E_1)$ dan $f \in MP(E_2)$ maka $f \in MP(E_1 \cup E_2)$ dan $(MP) \int_{A \cup B} f = (MP) \int_A f + (MP) \int_B f$ untuk setiap himpunan terukur $A \subset E_1$ dan $B \subset E_2$.

Jika $f \in MP(E)$ maka $f \in MP(B)$ untuk setiap sel bagian $B \subseteq E$.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur. Bahan-bahan yang diperlukan berupa konsep-konsep dasar dan teori-teori pendukung diperoleh dengan menelusuri buku-buku teks dan jurnal-jurnal ilmiah.

Berdasarkan data yang telah disusun, dibangun definisi fungsi primitif dari fungsi terintegral McShane-Pettis. Langkah berukutnya adalah membuktikan kekontinuan fungsi primitif dari integral McShane-Pettis dengan menggunakan kekontinuan fungsi primitif dari fungsi integral McShane. Terakhir adalah menyelidiki akibat-akibat dari kekontinuan fungsi primitif tersebut terhadap fungsi terintegral McShane-Pettis.

3. Karakteristik Primitif-M atas Fungsi Terintegral-M pada sel $E \subset R^n$

Sifat kontinu primitif fungsi terintegral McShane-Pettis dibuktikan dengan menggunakan kekontinuan primitif fungsi terintegral McShane. Oleh karena itu terlebih dahulu dibahas tentang definisi sifat kontinu suatu fungsi dan pembuktian kekontinuan primitif fungsi terintegral McShane.

Misalkan G fungsi interval aditif yaitu $G(I_1 \cup I_2) = G(I_1) + G(I_2)$ untuk setiap interval I_1 dan I_2 , $I_1^0 \cap I_2^0 = \phi$. Fungsi G yang dimaksud ini adalah fungsi bernilai riil yang terdefinisi pada E, yaitu koleksi semua interval bagian sel $E \subset R^n$ dengan $G(I) = 0$ untuk interval degenerate $I \subset E$.

Fungsi aditif G dari E ke R dikatakan kontinu di sel $I \subseteq E$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ dengan sifat untuk setiap interval $J \subseteq I$ dengan $|J| < \eta$ berakibat $|G(J)| < \varepsilon$. Jika G kontinu di setiap sel $I \subseteq E$ maka dikatakan G kontinu pada sel E.

Fungsi aditif G dari E ke R dikatakan kontinu pada himpunan terbuka $B \subseteq E$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ dengan sifat untuk setiap sel $I \subseteq B$ dengan $|J| < \eta$ berakibat $|G(J)| < \varepsilon$.

Fungsi aditif G dari E ke R dikatakan kontinu mutlak pada sel E, ditulis $G \in AC(E)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ dengan sifat untuk setiap koleksi sel $D = \{I_i , i = 1, 2, ..., d\}$ yang tidak saling tumpang tindih di dalam E dan $\sum_{i=1}^{d} |I_i| < \eta$ berlaku $\sum_{i=1}^{d} |G(I_i)| < \varepsilon$.

Berdasarkan konsep pada tinjauan pustaka dibangun fungsi primitif –M atas fungsi terintegral McShane pada sel $E \subset R^n$. Koleksi semua sel bagian sel E dilambangkan dengan E.

Jika G fungsi interval terdefinisi pada E dan untuk setiap sel $I \subseteq E$, $G(I)$ merupakan nilai integral-M fungsi f pada sel I maka G disebut primitif integral McShane f (primitif-f) pada sel E.

Oleh karena itu jika G merupakan primitif-M fungsi $f \in M(E)$ maka G merupakan fungsi interval aditif pada sel E, yaitu $G(B \cup C) = G(B) + G(C)$ untuk sebarang B dan C sel bagian E yang tidak saling tumpang tindih.

Setelah dibangun primitif-M atas fungsi terintegral-M pada sel E maka selanjutnya definisi integral-M dapat ditulis sebagai berikut:

Definisi 1. Fungsi $f : E \subset R^n \to R$ dikatakan terintegral McShane ke $G(E)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I_i, \overline{\xi_i})\} = \{(I_1, \overline{\xi_1}), (I_2, \overline{\xi_2}), ..., (I_q, \overline{\xi_q})\}$ pada E berlaku

$$\left|(D)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$$

Lemma 2. Lemma Henstock. Jika $f \in M(E)$ yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi_1}), (I_2, \bar{\xi_2}), \ldots, (I_q, \bar{\xi_q})\}$ pada E berlaku $\left|(D)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$

maka untuk setiap partisi McShane δ-fine D_1 di dalam sel E dengan $D_1 \subseteq D$ berlaku $\left|(D_1)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < 2\varepsilon$

Berdasarkan Lemma di atas dapat dibuktikan teorema berikut:

Teorema 3. Jika f ∈ M(E) dengan primitif G maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine

$D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi_1}), (I_2, \bar{\xi_2}), \ldots, (I_q, \bar{\xi_q})\}$ pada E berlaku $(D)\sum\left|f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$

Bukti :

Diketahui $f \in M(E)$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine

$D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi_1}), (I_2, \bar{\xi_2}), \ldots, (I_q, \bar{\xi_q})\}$ pada E berlaku $\left|(D)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$.

Ketaksamaan tersebut berarti $f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I) \geq 0$ atau $f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I) < 0$ sehingga

$$\left|(D)\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| = \left|\sum_1 f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I) + \sum_2 f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$$

dengan $\sum_1$ menyatakan jumlahan didalam D dengan $f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I) \geq 0$ dan $\sum_2$ menyatakan jumlahan di dalam D dengan $f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I) < 0$. Menurut Lemma Henstock diperoleh $\left|\sum_1 f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon/2$ dan $\left|\sum_2 f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon/2$.

Akibatnya

$$(D)\sum\left|f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| = \left|\sum_1 f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| + \left|\sum_2 f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$$

Teorema 4. Jika G merupakan primitif fungsi terintegral McShane f pada sel $E \subset R^n$ maka G kontinu pada sel E.

Bukti :

Diketahui f terintegral McShane pada sel E maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi_1}), (I_2, \bar{\xi_2}), \ldots, (I_q, \bar{\xi_q})\}$ pada E berlaku $(D)\sum\left|f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I)\right| < \varepsilon$

Ambil sel $J \subset E$ sebarang, maka terdapat partisi McShane δ-fine $D_1 = \{(I, \bar{\xi})\}$ pada sel J. Gabungan partisi pada J dan pada $\mathrm{cl}(E\backslash J)$ merupakan partisi McShane δ-fine D^* pada E. Untuk bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut terdapat $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{M}$ dengan $M = maks\left\{\left|f(\bar{\xi}) / \bar{\xi} \in D^*\right\}\right|$.

Jika $\mu(J) < \eta$ maka dengan menggunakan Lemma Henstock dan pertidaksamaan di atas diperoleh

$$\begin{aligned}|G(J)| &\leq (D_1)\sum\left|G(I) - f(\bar{\xi})\mu(I)\right| + (D_1)\sum\left|f(\bar{\xi})\mu(I)\right| \\ &< 2\varepsilon + (D_1)\sum M\mu(I) \leq 2\varepsilon + M\mu(J) < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Jadi terbukti primitif fungsi $f \in M(E)$ kontinu pada E.

Karena E adalah sel maka E kompak, sehingga primitif-M G kontinu seragam pada sel E.

Teorema 5. Misalkan $f \in M(E)$. Jika G primitif fungsi f maka G kontinu mutlak pada E.

Bukti :

Ambil bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $D = \{(I, \bar{\xi})\}$ pada E berlaku $(D)\sum \left| f(\bar{\xi})\mu(I) - G(I) \right| < \varepsilon$

Ambil partisi $D_0 = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi_1}), (I_2, \bar{\xi_2}), \ldots, (I_q, \bar{\xi_q})\}$. Untuk $\varepsilon > 0$ di atas terdapat $\eta = \varepsilon / M$ dengan $M = maks\{|f(\xi_i)| : 1 \le i \le q\}$.

Misalkan $\{J_j,\ 1 \le j \le p\}$ koleksi berhingga sel yang tidak saling tumpang tindih dalam E sehingga $\sum_{j=1}^{p} \mu(J_j) < \eta$. Asumsikan untuk setiap j, $J_j \subseteq I_i$ untuk suatu i. Untuk setiap i, misalkan $\theta_i = \{j : J_j \subseteq I_i\}$ dan misalkan

$D = \bigcup_{i=1}^{q} \{(\xi_i, J_j) : j \in \theta_i\}$ dengan $\mu(D) < \eta$. Selanjutnya diperoleh

$$\left| \sum_{j=1}^{p} G(J) \right| = |G(D)| \le \left| G(D) - D\sum_{i=1}^{q} f(\bar{\xi}_i)\mu(J_i) \right| + \left| D\sum_{i=1}^{q} f(\bar{\xi}_i)\mu(J_i) \right| \le \varepsilon + M\mu(D) < 2\varepsilon$$

Jadi terbukti G kontinu mutlak pada E.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan definisi fungsi interval aditif, dibangun definisi primitif fungsi terintegral McShane. Jika fungsi f terintegral McShane, maka primitifnya ada dan kontinu. Beberapa sifat lainnya dengan syarat-syarat tertentu juga dipenuhi oleh fungsi primitif ini.

5. DAFTAR PUSTAKA

Gordon, R.A., 1994, *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, American Mathematical Sociaty, UK.

Haripamyu, 2003, *Integral McShane-Pettis*, Tesis S2 Program Studi Matematika Universitas Gadjah Mada.

Lee, P.Y., 2000, *Integral: An Easy Approach After Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press.

Pfeffer, W.F. , 1993, *The Riemann Approach to Integration: Local geometric theory*, Cambridge University Press.

Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, Third Edition. Macmillan Publishing Company. New York

Wheeden, R.L and Zygmund, A. , 1977, *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker Inc, New York and Basel.