65

Perbandingan Metode-metode Analisis Kestabilan pada Model Proyeksi Populasi Berstruktur Stage

oleh :

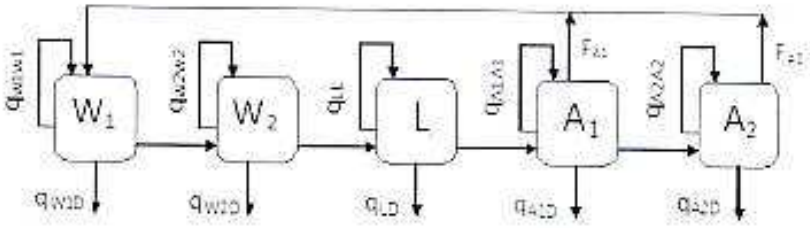
[1]Efendi, M.Si

Abstrak : *Schaeffer dkk (2008) menggunakan model matrik proyeksi populasi untuk melihat pengaruh iklim pada fluktuasi populasi nyamuk Aedes Africanus dan Aedes furcifer setelah terjadinya wabah penyakit kuning (yellow fever) di daerah Ivory Coast Afrika. Dengan simulasi Schaeffer, dkk bisa memprediksi fluktuasi populasi untuk waktu 2 tahun dengan baik karena penentuan parameter populasi yang cukup akurat. Prediksi untuk waktu 3 tahun memperlihatkan penyimpangan yang signifikan. Schaeffer, dkk juga tidak melakukan analisis fluktuasi populasi jangka panjang untuk modelnya. Ada tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk menganalisis populasi jangka panjang yaitu norma matrik, radius spektral dan basic reproductive ratio (R_0). Pada paper ini, dibandingkan ketiga metode analisis tersebut dengan aplikasi pada model Schaeffer, dkk. Disamping itu juga dibandingkan tiga metode penurunan R_0 yaitu versi Ackleh dkk, Beck-Lewis (2007). Dalam simulasi diperlihatkan bahwa radius spektral dan R_0 bisa menjelaskan dengan baik kestabilan titik tetap untuk kasus matrik Q konstan. Untuk Q bergantung waktu kestabilan titik tetap sebagian dapat dianalisis dengan memodifikasi Teorema Phat (1997).*

Kata kunci : matrik proyeksi populasi, kestabilan titik tetap, norma matrik, radius spektral, basic reproductive ratio (R_0)

1 Pendahuluan

Model populasi oleh Schaeffer digambarkan pada diagram berikut :



Gambar 1. Diagram model proyeksi populasi oleh Schaeffer (2007)

Dimana simpul menyatakan fase pertumbuhan, yaitu : (W_1) telur awal, (W_2) telur matang, (L) Larva, (A_1) Dewasa awal, (A_2) Dewasa matang. Sisi

[1]Jurusan Matematika Universitas Andalas
e-mail : efendi@fmipa.unand.ac.id

menyatakan probabilitas transisi q_{ij} untuk $(i,j = W_1, W_2, L, A_1, A_2)$, laju mortalitas q_{iM} , fekunditas dewasa awal dan dewasa matang F_{A_1} dan F_{A_2}. Untuk penyederhanaan penulisan dimisalkan $a = q_{W_1W_1}$, $b = F_{A_1}$, $c = F_{A_2}$, $d = q_{W_1W_2}$, $e = q_{W_2W_2}$, $f = q_{W_2L}$, $g = q_{LL}$, $h = q_{LA_1}$, $m = q_{A_1A_1}$, $n = q_{A_1A_2}$ dan $k = q_{A_2A_2}$. Sehingga model proyeksi populasi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$N_t = QN_{t-1} \tag{1}$$

dengan $N_t = \begin{pmatrix} W_{1,t} \\ W_{2,t} \\ L_t \\ A_{1,t} \\ A_{2,t} \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & c \\ d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & k \end{pmatrix}$.

Titik tetap adalah vektor N yang memenuhi persamaan $N = QN$ atau N yang berada di $\ker(Q - I)$. Selanjutnya penyebutan titik tetap dalam paper ini selalu merujuk pada persamaan (1). Kestabilan titik tetap didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1 : Misalkan N titik tetap untuk model MPP. Titik tetap N dikatakan stabil jika dan hanya jika $\lim N_t = N$.

Dengan demikian pola pertumbuhan populasi jangka panjang dapat dilihat dari kestabilan titik tetap, sebab jika titik tetap stabil maka keadaan populasi akan konvergen ke titik tetap tersebut.

2 Norma Matrik dan Radius Spektral

Berdasarkan sifat norma matrik Q, maka kestabilan titik tetap dapat diferifikasi sebagai berikut.

Teorema 1 : Jika $\|Q\| < 1$, maka $Q^t \to 0$ sedemikian sehingga 0 stabil

Bukti : Berdasarkan sifat perkalian norma matrik ($\|QQ\| \leq \|Q\|\,\|Q\|$) diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} \|Q^t\| \leq \lim_{t\to\infty} \|Q\|^t$$

Karena $\|Q\| < 1$, maka $\lim_{t\to\infty} \|Q\|^t = 0$. Sehingga haruslah $\lim_{t\to\infty} \|Q^t\| = 0$. Akibatnya $Q^t \to 0$. Oleh karena itu, untuk $t \to \infty$ pada model MPP, berlaku:

$$N_t = Q^t N_0 \to 0$$

Jadi 0 stabil asimtotik ■

Namun demikian norma matrik tidak sensitif untuk mendeteksi kestabilan, karena ada $\|Q\| > 1$ dengan $Q^t \to 0$ (lihat Efendi(2009)). Hal ini dapat diatasi oleh radius spektral dari matrik Q ditulis sebagai $\rho(Q)$. Berdasarkan Teorema Perron-Frobenious (lihat [7]) terdapat nilai eigen positif dominan untuk matrik *nonnegative irreducibel dan primitive*. Oleh karena itu dapat didefinisikan $\rho(Q)$ dari nilai eigen positif dominan dari matrik Q.

Teorema 2 : Misalkan Q matrik *nonnegative irreducibel dan primitive*. Titik tetap 0 stabil jika hanya jika $\rho(Q) < 1$.

Bukti : Perdefinisi radius spektral sebagai nilai eigen maksimal dari matrik Q, maka jelas titik tetap 0 stabil. Hal ini bisa juga dijelaskan dalam kaitan antara radius spekral dan norma matrik sebagai berikut. Definisikan norma $\|.\|_d$ sedemikian sehingga $\rho(Q) < 1$ mengakibatkan $\|Q\| < 1$. Oleh karena itu, haruslah 0 stabil asimtotik. Sebaliknya, lakukan faktorisasi *Schurz* pada matrik Q sehingga diperoleh :

$$Q = RSR^T$$

dengan R matrik ortogonal dan S matrik segitiga atas dimana nilai-nilai eigen S sama dengan Q. Selanjutnya, untuk $d > 0$, bentuk matrik diagonal $D = diag(d^1, d^2, ..., d^j)$ sedemikian sehingga DSD^{-1} merupakan matrik segitiga atas dan entri diagonalnya sama dengan nilai eigen Q dan S. Pandang jumlah kolom dari dari nilai mutlak entri DSD^{-1}, yaitu :

$$|c_j| + \sum_{i=1}^{j-1} d^{-j-1}|s_{ij}|$$

Karena $|c_j| \leq \rho(Q)$, maka untuk $\epsilon > 0$, dengan memilih d cukup besar, diperoleh :

$$|c_j| + \sum_{i=1}^{j-1} d^{-j-i}|s_{ij}| < \rho(Q) + \epsilon$$

yang ekuivalen dengan :

$$\|DSD^{-1}\| = \max_j \left(|c_j| + \sum_{i=1}^{j-1} d^{-j-i}|s_{ij}| \right) < \rho(Q) + \epsilon$$

Selanjutnya definisikan $\|.\|_d$ untuk matrik X dengan :

$$\|X\|_d = \left\|(RD^{-1})^{-1} X (RD^{-1})\right\|_1$$

Sedemikian sehingga untuk matrik Q berlaku :

$$\begin{aligned} \|Q\|_d &= \left\|(RD^{-1})^{-1} Q (RD^{-1})\right\|_1 \\ &= \|DSD^{-1}\| \\ &< \rho(Q) + \epsilon \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $\rho(Q) < 1$, maka ϵ dan δ dapat dipilih sedemikian sehingga $\|Q\|_d < 1$. Sehingga titik tetap 0 stabil asimtotik ■

Kelemahan Teorema 2 adalah dalam hal penghitungan nilai eigen dominan yang berarti harus memecahkan akar polinomial karakteristik yang tidak selalu mudah. Disamping itu, Teorema 2 juga belum bisa menjelaskan persoalan

kestabilan untuk matrik Q bergantung waktu, yaitu Q_t. Namun demikian untuk penyederhanaan analisis kestabilan dapat diturunkan basic reproduction number pada bagian 3. Sementara untuk Q_t sebagian kasus kestabilan dapat dianalisis dengan memodifikasi Teorema Phat (1997) (lihat [9]), sehingga diperoleh teorema berikut.

Teorema 3 : Misalkan $\|[Q_0]^t\| \leq Ke^{-\delta t}$, $\left\|[Q_0]^{t-1-i}\right\| \leq Ke^{-\delta(t-1-i)}$

dan $\limsup_{i\to\infty} \|Q_{i+1} - Q_0\| < \frac{1-e^{-\delta}}{K}$, maka $\|N_t\| \to 0$, untuk $t \to \infty$.

Bukti : Tulis : $N_1 = Q_0 N_{t-1} + [Q_i - Q_0]N_{t-1}$. Maka :

$$\begin{aligned} N_1 &= Q_0 N_0 + [Q_1 - Q_0]N_0 \\ N_2 &= Q_0 N_1 + [Q_2 - Q_0]N_1 = [Q_0]^2 N_0 + Q_0[Q_1 - Q_0]N_0 + [Q_2 - Q_0]N_1 \end{aligned}$$

secara umum :

$$N_t = [Q_0]^t N_0 + \sum_{i=0}^{t-1} [Q_0]^{t-1-i}[Q_{i+1} - Q_0]N_i$$

Jika diambil norma kedua ruas diperoleh:

$$\|N_t\| \leq \left\|[Q_0]^t\right\| \|N_0\| + \sum_{i=0}^{t-1} \left\|[Q_0]^{t-1-i}\right\| \|[Q_{i+1} - Q_0]\| \|N_i\|$$

Karena $\|[Q_0]^t\| \leq Ke^{-\delta t}$ dan $\left\|[Q_0]^{t-1-i}\right\| \leq Ke^{-\delta(t-1-i)}$,
maka :

$$\|N_t\| \leq Ke^{-\delta t} \|N_0\| + \sum_{i=0}^{t-1} Ke^{-\delta(t-1-i)} \|[Q_{i+1} - Q_0]\| \|N_i\|$$

atau :

$$e^{-\delta t} \|N_t\| \leq K \|N_0\| + \sum_{i=0}^{t-1} Ke^{\delta(i+1)} \|Q_{i+1} - Q_0\| \|N_i\|$$

Misalkan $y_t = e^{\delta t} \|N_t\|$, $y_i = e^{\delta(i)} \|N_i\|$ dan $a_i = Ke^{\delta} \|Q_{i+1} - Q_0\|$, $C = K \|N_0\|$
Maka diperoleh : $y_t \leq C + \sum_{i=0}^{t-1} a_i y_i$
sehingga menurut ketaksamaan Gronwall (lihat [10]), berlaku :

$$y_t \leq C \prod_{i=0}^{t-1} (1 + a_i)$$

atau dapat ditulis :

$$e^{\delta t} \|N_t\| \leq K \|N_0\| \prod_{i=0}^{t-1} (1 + Ke^{\delta} \|Q_{i+1} - Q_0\|)$$

atau :

$$\|N_t\| \leq K \|N_0\| e^{-\delta t} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + Ke^{\delta} \|Q_{i+1} - Q_0\|)$$

yang ekuivalen dengan :

$$\|N_t\| \leq K \|N_0\| \prod_{i=0}^{t-1} (e^{-\delta} + K \|Q_{i+1} - Q_0\|)$$

Karena:

$$\limsup_{i \to \infty} \|Q_{i+1} - Q_0\| < \frac{1 - e^{-\delta}}{K}$$

maka dapat dicari bilangan $p > 0$ sedemikian sehingga :

$$\limsup_{i \to \infty} K \|Q_{i+1} - Q_0\| \leq p < 1 - e^{-\delta}$$

Oleh karena itu terdapat bilangan bulat positif M, sedemikian sehingga $i \geq M$, diperoleh :

$$K \|Q_{i+1} - Q_0\| + e^{-\delta} < p + e^{-\delta} = q < 1$$

Oleh karena itu :

$$\|N_t\| \leq K \|N_0\| \prod_{i=0}^{t-1} (e^{-\delta} + K \|Q_{i+1} - Q_0\|) \leq K \|N_0\| \prod_{i=0}^{t-1} (q) = K \|N_0\| q^t$$

Karena $K \|N_0\| q^t \to 0$, untuk $t \to \infty$, maka $\|N_t\| \to 0$, untuk $t \to \infty$.■

Kelemahan Teorema 3 adalah tidak bisa menjelaskan semua persoalan kestabilan titik tetap nol. Dalam hal ini ada matrik Q_t dengan $\|[Q_0]^t\| > Ke^{-\delta t}, \forall K, \delta > 0$ atau $\limsup_{t \to \infty} \|Q_{t+1} - Q_0\| \geq \frac{1-e^{-\delta}}{K}$, tetapi $\|N_t\| \to 0$, untuk $t \to \infty$ (lihat Efendi (2009)).

3 Basic Reproduction Ratio

Basic reproduction ratio (BRR) dinotasikan dengan R_0. Menurut Ackleh, A.S, Chiquet, R.A (2008) R_0 didefinisikan sebagai nilai eigen positif dominan dari matrik $F(I - P)^{-1}$, dimana $F + P = Q$ dengan Q adalah matrik proyeksi pada persamaan (1) (lihat referensi [1]). Matrik F memuat fekunditas dan matrik P memuat probabilitas transisi (lihat [1],[3]), yaitu :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_C & F_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & k \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Sehingga diperoleh :

$$R_0 = \frac{dfh\,(b - bk + cr)}{(1 - c)\,(1 - a)\,(1 - g)\,(1 - k)\,(1 - m)} \tag{3}$$

dengan $c \neq 1, a \neq 1, g \neq 1, k \neq 1, m \neq 1$.

Karena R_0 nilai eigen dominan matrik $F(I - P)^{-1}$ dengan $F + P = Q$, maka nilai eigen dominan matrik Q tidak sama dengan nilai R_0, namun demikian terdapat hubungan ekuivalen antara nilai eigen dominan matrik Q dan nilai R_0. Misalkan $Q = F + P$ dan $R = F(I - P)^{-1}$. Misalkan nilai eigen dominan dari Q adalah $\rho(Q) = \lambda$ dan nilai eigen dominan dari R adalah $\rho(R) = R_0$. Karena Q dan R matrik *non-negative* dan *irreducible* maka menurut teorema Perron-Frobenious (lihat [7]) haruslah $\lambda > 0$ dan $R_0 > 0$. Untuk $R_0 > 1$ berlaku ketaksamaan berikut :

$$P + \frac{F}{R_0} < P + F < R_0 P + F \tag{4}$$

Sedangkan untuk $R_0 < 1$ berlaku :

$$R_0 P + F < P + F < P + \frac{F}{R_0} \tag{5}$$

Menurut hubungan ketaksamaan matrik dengan nilai eigen dominan berdasarkan (4) dan (5) diperoleh :

$$\rho\left(P + \frac{F}{R_0}\right) < \rho(P + F) < \rho(R_0 P + F) \tag{6}$$

Sedangkan untuk $R_0 < 1$ berlaku :

$$\rho(R_0 P + F) < \rho(P + F) < \rho\left(P + \frac{F}{R_0}\right) \tag{7}$$

Karena R matrik *non-negative*, maka menurut teorema Perron-Frobenius terdapat vektor eigen kiri y^T dengan entri-entri nonnegatif yang berkaitan dengan nilai eigen dominan R_0, sedemikian sehingga berlaku :

$$R_0 y^T = y^T R = y^T F(I - P)^{-1} \tag{8}$$

sehingga diperoleh:

$$y^T = y^T \left(P + \frac{F}{R_0}\right)$$

Karena $\left(P + \frac{F}{R_0}\right)$ *nonnegative irreducibel*, haruslah:

$$\rho\left(P + \frac{F}{R_0}\right) = 1 \tag{9}$$

Berdasarkan (8) juga dapat diperoleh:

$$y^T (R_0 P + F) = R_0 y^T$$

Karena $(R_0 P + F)$ *nonnegative irreducibel*, haruslah:

$$\rho(R_0 P + F) = R_0 \tag{10}$$

Berdasarkan (9) dan (10), maka dari ketaksamaan (6) dan (7) diperoleh $1 < \lambda < R_0$, untuk $R_0 > 1$ dan $R_0 < \lambda < 1$, untuk $R_0 < 1$.

Selanjutnya berkaitan dengan R_0, kestabilan titik tetap dijelaskan oleh sifat berikut :

Teorema 4 : Untuk model proyeksi populasi (persamaan (1))

(a) Jika $R_0 < 1$, maka 0 stabil.

(b) Jika $R_0 = 1$, maka ada titik tetap nontrivial N dengan N bisa stabil dan mungkin juga tidak stabil.

(c) Jika $R_0 > 1$, maka 0 tidak stabil.

Bukti : Dengan menggunakan ekuivalensi antara nilai eigen dominan matrik Q dengan R_0. Misalkan λ adalah nilai eigen dominan dari matrik Q, maka R_0 ekuivalen dengan λ, yaitu berlaku $1 < \lambda < R_0$ atau $R_0 < \lambda < 1$. Oleh karena itu Teorema 4 merupakan konsekuensi langsung dari Teorema 2 ■

Karena R_0 telah dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dari entri-entri matrik Q, maka analisis kestabilan tidak perlu lagi melibatkan penghitungan nilai eigen. Dengan demikian penggunaan R_0 dalam analisis kestabilan lebih efisien dalam komputasi.

4 Metode Alternatif Penurunan R_0

Pada [3] R_0 diinterpretasikan sebagai rata-rata jumlah keturunan yang dapat dihasilkan sepanjang hidup tiap individu dalam populasi. Oleh karena itu, R_0 dapat diformulasikan sebagai berikut. Pandang pada saat awal hanya ada satu individu telur (keadaan awal populasi $N_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$). Misalkan matrik Q ditulis sebagai penjumlahan matrik transisi P dan matrik fekunditas F, yaitu : $Q = F + P$, dengan F dan P pada persamaan (2). Maka proporsi individu tiap fase pada waktu t dapat dihitung sebagai $P^t N_1$. Oleh karena itu, jumlah telur yang dihasilkan pada waktu t adalah $\|FP^t N_1\|_1 = \max_{1 \le j \le 5} \left(\sum_{i=1}^{5} (fp^t n)_{ij} \right)$. Karena R_0 dipandang sebagai rata-rata jumlah keturunan yang dapat dihasilkan sepanjang hidup tiap individu dalam populasi, maka dapat didefinisikan R_0 sebagai banyaknya telur yang dihasilkan dari satu individu semula sepanjang umur individu tersebut. Misalkan maksimum umur individu tersebut adalah T artinya $P^t = 0$, untuk $t > T$, maka diperoleh :

$$R_0 = \left\| \sum_{t=0}^{T} FP^t N_1 \right\|_1 \tag{11}$$

Tetapi karena $P^t = 0$, untuk $t > T$, maka $\sum_{t=0}^{T} P^t N_1 = \sum_{t=0}^{\infty} P^t N_1$. Akibatnya diperoleh

$$R_0 = \left\| F \sum_{t=0}^{\infty} P^t N_1 \right\|_1$$

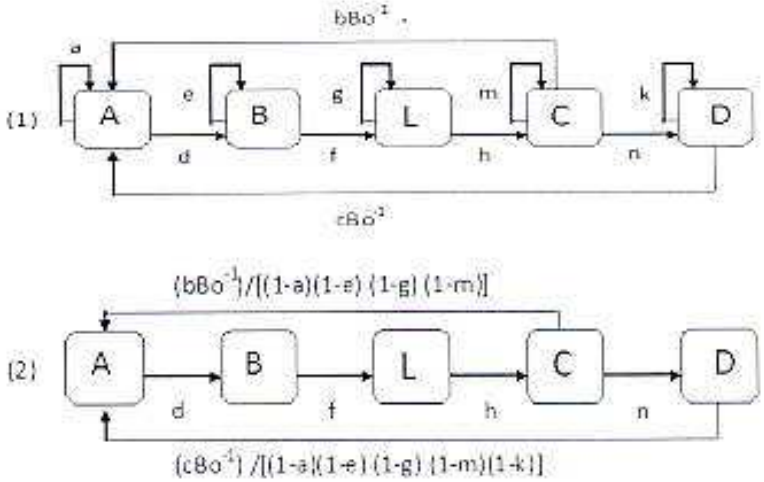
Karena nilai eigen dominan dari matrik P selalu lebih kecil dari 1, maka $\sum_{t=0}^{\infty} P^t N_1 = (I - P)^{-1} N_1$. Akibatnya

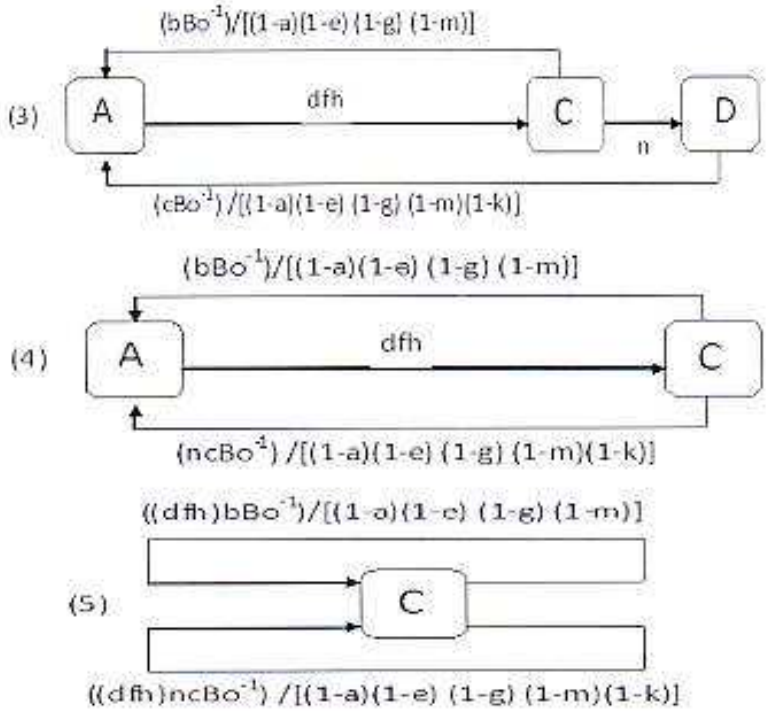
$$R_0 = \left\| F(I - P)^{-1} N_1 \right\| = \frac{dfh\,(b - bk + cn)}{(1 - e)\,(1 - a)\,(1 - g)\,(1 - k)\,(1 - m)}$$

Yaitu diperoleh hasil yang sama dengan persamaan (3).

Berdasarkan penurunan R_0 pada persamaan (11), sebenarnya bukti Sifat 7 trivial. Sebab misalnya jika $R_0 < 1$, berarti rata-rata jumlah keturunan yang dapat dihasilkan sepanjang hidup tiap individu dalam populasi kurang dari 1. Akibatnya terjadi penurunan jumlah individu dalam populasi dari waktu ke waktu. Atau dalam pengertian lain titik tetap 0 adalah stabil.

Pada tahun 2007, Beck-Lewis mengumumkan suatu metode baru dalam penghitungan R_0 (lihat [3]), tanpa harus memecahkan persamaan karakteristik untuk mendapatkan nilai eigen. Jadi lebih hemat dalam hal komputasi. Prinsip dasar metode Beck-Lewis adalah pereduksian graf dengan aturan Mason (lihat [3]), sehingga tidak merubah sifat kestabilan titik tetap pada sistem yang berkaitan. Berikut pemakaian metode Beck-Lewis untuk model MPP.





Gambar 2. (1) Graf awal, (2) Reduksi semua loop, (3) Reduksi state B dan L, (4) Reduksi state D dan (5) Reduksi state A.

Jika dijumlahkan diperoleh $[(dfh)bR_0^{-1}]/[(1-a)(1-e)(1-g)(1-m)] + [(dfh)ncR_0^{-1}]/[(1-a)(1-e)(1-g)(1-m)(1-k)] = 1$. Sehingga $R_0 = \frac{dfh(1-bk+cn)}{(1-e)(1-a)(1-g)(1-k)(1-m)}$. Yaitu hasil yang sama untuk penurunan R_0 sebelumnya.

Kelebihan metode Beck-Lewis adalah penuruman R_0 tanpa perhitungan nilai eigen. Artinya, metode Beck-Lewis lebih hemat dari segi komputasi dibandingkan penurunan R_0 pada persamaan (11) dan (3). Namun demikian kelemahan metode Beck-Lewis adalah tidak mudah melihat interpretasi R_0 dikaitkan dengan fakta dinamika populasi. Dalam hal ini, penurunan R_0 pada persamaan (11) lebih unggul sebab memang setiap langkah penurunan dikaitkan dengan interpretasi pada populasi. Selain itu, penurunan R_0 pada persamaan (11) juga tidak melibatkan perhitungan nilai eigen. Jadi juga lebih hemat dari segi komputasi dibandingkan R_0 pada persamaan (3).

Dugaan : Berdasarkan interpretasi R_0, untuk kasus matrik Q bergantung waktu,

dapat dirumuskan

$$\begin{aligned} R_{0,t} &= \left\| \begin{array}{c} FIN_1 + FP(1)N_1 + FP(2)P(1)N_1 + FP(3)P(2)P(1)N_1 \\ +... + F[P(t)...P(2)P(1)N_1| + ... \end{array} \right\| \\ &= \left\| FIN_1 + F\sum_{t=1}^{\infty} P(t)P(t-1)...P(2)P(1)N_1 \right\| \end{aligned} \tag{12}$$

Dugaan diatas belum dibuktikan secara analitik. Kesulitan pembuktiaan adalah tidak adanya kriteria kekonvergenan deret matrik bergantung waktu.

5 Simulasi

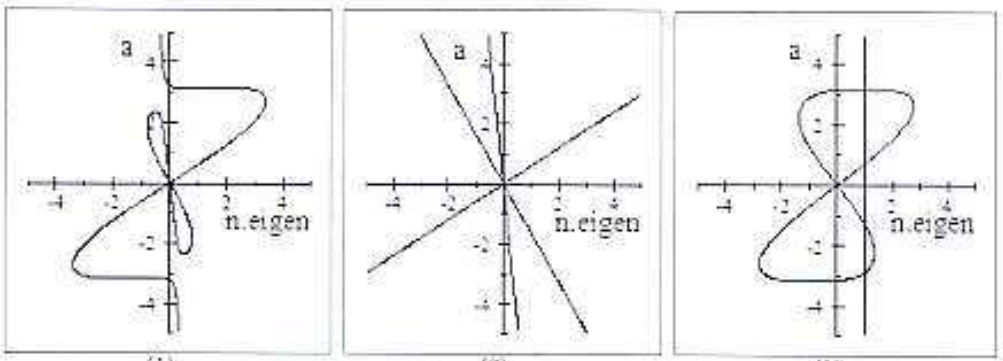
5.a. Matrik Q konstan

Pada bagian ini, diberikan simulasi model proyeksi populasi berdasarkan informasi kualitatif. Jika laju mortalitas tertinggi adalah pada fase larva, sedangkan terendah pada fase telur dan probabilitas menetap pada suatu fase lebih kecil dari probabilitas berpindah ke fase berikutnya, fekunditas fase dewasa awal lebih kecil dari fekunditas fase dewasa matang, maka matrik Q dapat dirumuskan sebagai :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4a & 0 & 0 & F_{A_1} & F_{A_2} \\ 0.5a & 0.3a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6a & 0.2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3a & 0.25a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6a & k \end{pmatrix} \tag{13}$$

dengan a suatu faktor pembobot.

Selanjutnya dengan menghitung polinom karakteristik $P_5(\lambda)$ pada matrik Q dan menggunakan *implicit plot* diperoleh hubungan nilai a dan nilai eigen matrik Q pada Gambar 3.



Gambar 3. Grafik hubungan antara nilai a dan nilai eigen matrik Q.
(1) $F_{A_1} = 20\sin(a), F_{A2} = 30\sin(a), k = 0.8a$
(2) $F_{A_1} = 20a, F_{A_2} = 30a, k = 0.8a$
(3) $F_{A_1} = 20\sin(a), F_{A_2} = 0, k = 1$

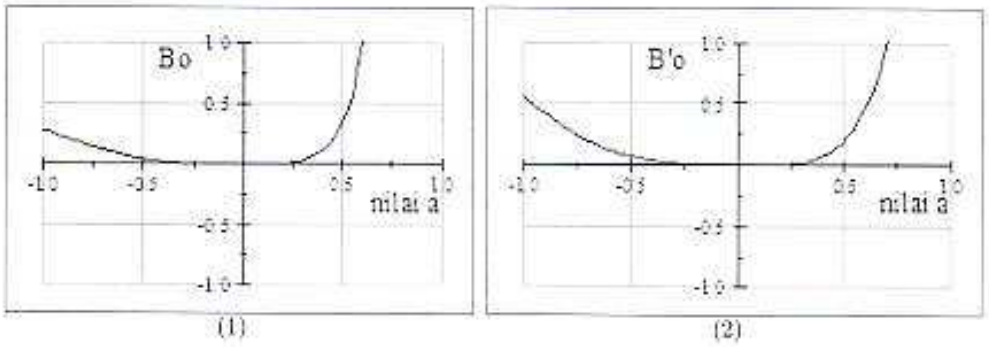
Gambar 3 menunjukkan titik potong grafik polinom karateristik $P_5(\lambda)$ dengan bidang koordinat $\langle \lambda = 0 = a \rangle$, sehingga diperoleh hubungan nilai eigen real matrik Q dengan nilai a. Model dengan matrik Q hanya mempunyai titik tetap 0, tetapi titik tetap nontrivial akan muncul jika 1 merupakan nilai eigen Q (Gambar 3(3)).

Pada matrik Q nilai R_0 adalah :

$$R_0 = \frac{(0.5a)(0.6a)(0.3a)\,(20\sin(a) - 20(0.8a)\sin(a) + 30(0.6a)\sin(a))}{(1-(0.4a))\,(1-(0.3a))\,(1-(0.2a))\,(1-(0.25a))\,(1-(0.8a))} \qquad (14)$$

Sedangkan untuk kasus terdapat titik tetap nontrivial pada Gambar 3(3) R_0 tidak dapat dihitung menggunakan persamaan (3), karena terdapat pembilang bernilai nol untuk $q_{DD} = 1$. Oleh karena itu, R_0 dapat dimodifikasi sebagai berikut:

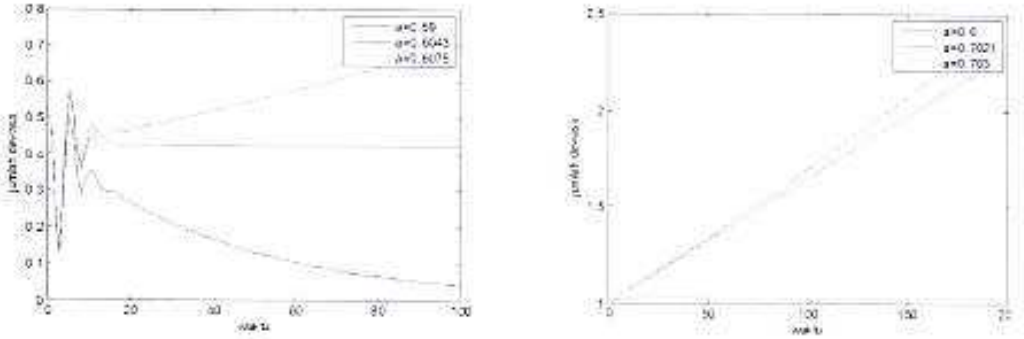
$$R_0' = \frac{(0.5a)(0.6a)(0.3a)(20\sin(a))}{(1-0.4a)\,(1-0.3a)\,(1-0.2a)\,(1-0.25a)}$$



(1) (2)

Gambar 4. (1) Grafik hubungan R_0 terhadap nilai a, (2) Grafik hubungan R_0' dengan nilai a.

Selanjutnya dengan menggunakan *software Matlab*, dapat dilihat jumlah populasi berdasarkan nilai a.



(1) (2)

Gambar 5. Grafik jumlah populasi dewasa dengan variasi nilai a

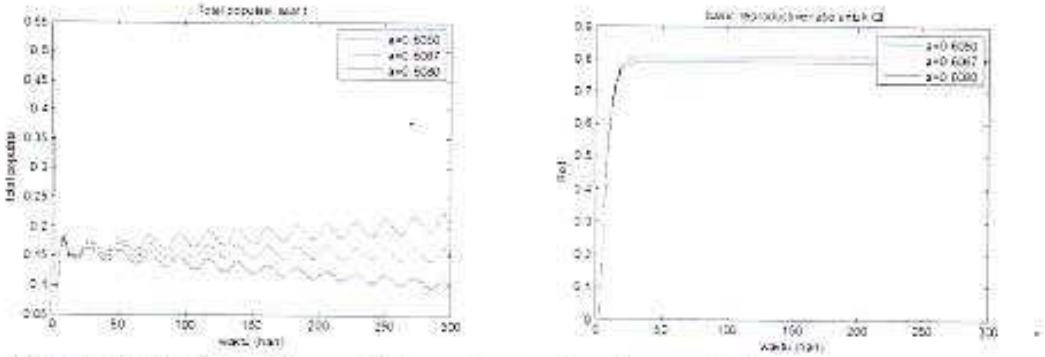
Pada Gambar 5(1), jumlah populasi dewasa konvergen ke 0.4241 untuk $a = 0.6043$ ($R_0 = 1$) dan konvergen ke nol (populasi punah) untuk $a = 0.59$ ($R_0 = 0.8726$). Sementara untuk $a = 0.6075$ ($R_0 = 1.0307$) populasi akan membesar menuju tak hingga. Pada Gambar 5(2) untuk $a = 0.6$ ($R_0' = 0.4709$) jumlah populasi akan konvergen ke suatu titik tetap nontrivial. Untuk $a = 0.7021$ ($R_0' = 1$) jumlah populasi dewasa akan membesar menuju tak hingga. Fakta ini menjustifikasi Teorema 4 bagian (b).

5.b. Matrik Q Bergantung Waktu

Sebagai ilustrasi dapat dipandang matrik Q_t berikut:

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0.9a\,|\sin(t)| & 0 & 0 & 20 & 30 \\ 0.9a\,|1-\sin(t)| & 0.8a\,|\sin(t)| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8a\,|1-\sin(t)| & 0.5a\,|\sin(t)| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5a\,|1-\sin(t)| & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Dengan menggunakan *software matlab* didapatkan plot grafik jumlah populasi nyamuk dewasa berdasarkan pendefinisian matrik Q_t pada persamaan (15), sebagai berikut :



Gambar 7. Grafik jumlah nyamuk dewasa dengan Q_t pada pers. (15)

Dalam Gambar 7(1), jumlah nyamuk dewasa berfluktuasi turun untuk $a = 0.6050$, berfluktuasi konstan untuk $a = 0.67$ dan berfluktuasi naik untuk $a = 0.6080$. Hal ini berkaitan dengan nilai $R_{0,t} < 0.8$ untuk $a = 0.6050$, $R_{0,t} = 0.8$ untuk $a = 0.6067$ dan $R_{0,t} > 0.8$ untuk $a = 0.6080$.

Dari ilustrasi diatas, terlihat bahwa persoalan kestabilan untuk model dengan matrik Q bergantung waktu berbeda dalam hal nilai ambang untuk $R_{0,t}$ sebesar 0.8, sedangkan untuk R_0 sebesar 1. Mengapa?.

6 Kesimpulan

Analisis kestabilan titik tetap model proyeksi populasi dapat dilakukan dengan menggunakan norma matrik (Teorema 1), radius spektral (Teorema 2) atau *basic reproduction number* R_0 (Teorema 4). Kelemahan norma matrik adalah tidak berlaku umum yaitu ada $\|Q\| > 1$, tetapi $Q^t \to 0$. Dalam hal ini radius spektral bisa mengatasi kekurangan norma matrik. Namun demikian radius spektral juga mempunyai kekurangan dalam komputasi karena penghitungan nilai eigen dominan tidak selalu mudah. Oleh karena itu diturunkan R_0 yang lebih unggul

dari segi keefisienan komputasi dan merupakan syarat cukup dan perlu untuk kestabilan titik tetap. Simulasi pada bagian 5.a menunjukkan bahwa radius spektral (nilai eigen dominan $\rho(Q)$) dan R_0 bisa menjelaskan dengan baik persoalan kestabilan titik tetap untuk model proyeksi populasi pada persamaan (1).

Disamping itu R_0 dapat diturunkan dengan tiga cara yaitu versi Ackleh dkk, Efendi dkk dan Beck-Lewis. Metode Beck-Lewis lebih unggul dalam komputasi karena tidak melibatkan penghitungan nilai eigen. Sementara Metode Efendi dkk lebih unggul dari segi kemudahan interpretasi. Disamping itu Metode Efendi dkk juga bisa dengan mudah diperluas untuk penurunan R_0 bagi model proyeksi populasi dengan matrik Q bergantung waktu (Q_t).

Selanjutnya dengan menggunakan analogi penurunan R_0 untuk kasus Q konstan versi Efendi dkk, diperoleh dugaan (*conjecture*) R_0 untuk analisis kestabilan dalam hal matrik Q_t. Dugaan ini belum dibuktikan secara analitik karena kesulitan untuk menentukan kekonvergenan deret matrik bergantung waktu. Sementara dalam simulasi untuk matrik Q_t terlihat bahwa $\|N_t\| \to 0, t \to \infty$ untuk $R_{0,t} < 0.8$. Jadi juga perlu dikaji kaitan antara struktur matrik proyeksi dengan nilai ambang untuk $R_{0,t}$.

7 Daftar Pustaka

1. Ackleh, A.S, Chiquet, R.A, [2008]. *The Global Dynamics of a Discrete Juvenile-adult Model. J. Bio. Dyn.*

2. Ackleh, A.S, Youssef, M.D, Sophia, R, Jang, J, [2007]. *A Three Stage Discrete-time Population Model. J. Bio. Dyn.*

3. Beck, T. de C, Lewis, M.A. [2007]. *A New Method for Calculating Net Rep. Rate from Graph Reduction with App. to the Control of Inv. Spe,* Bull. Math. Eco.

4. Gentle, J.E , [2007], *Matrix Algebra : Theory, Computation and Application in Statistics.* Springer.

5. Fouque F, Carinci R, Gabori P, Issaly J, Dominique J, Sabatier P, [2006]. *A. aegypti Survival and Dengue Transmission Patterns in French G,* J. Vec. Eco.

6. Huo, H,F, Li, W,T, [2005]. *Permanence and Global Stability of Solutions of a Non Autonomous Discrete Ratio Dependence Predator-Prey Model,* Hindawi.

7. Langer, H, [2001]. *Matrices With a Strictly Dominant Eigen Value.* Elem. Math.

8. Moussaoui, A, Ghouali, N, [2007]. *A Time Discrete Linear Model of Population Structured by age and The Time of Res.* AMS.

9. Phat, V.N, [1997]. *Asymptotic Stab. of Non Linear Time-Varying Differential Equation*. ICTP. Trieste. Italy.

10. Rafael, M.F, Ricardo, L.O, Eiras, A.E, [2008]. *Calculating The Survival Rate and Est. Population Density of Gravid A. Aegypti in Rio de J*. Cad. S. Púb.

11. Schaeffer, B, Mondet, B, Touzeau, S. [2008]. *Using a Climate-dependent Model to Predict Mosquito Abundance: An Application to A. africanus and A. furcifer*. Elsevier.