BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UKURAN UNTUK GRAF LINTASAN DAN GRAF BIPARTIT

Syafrizal Sy
Jurusan Matematika-Universitas Andalas

syafrizalsy@fmipa.unand.ac.id / syafrizalsy@gmail.com

ABSTRAK

Salah satu bentuk perluasan konsep dari bilangan Ramsey klasik adalah bilangan Ramsey multipartit. Burger dan van Vuuren (2004) memberikan dua perluasan konsep bilangan Ramsey multipartit yaitu bilangan Ramsey multipartit himpunan dan bilangan Ramsey multipartit ukuran. Konsep bilangan Ramsey multipartit ukuran adalah sebagai berikut. Misalkan $K_{n\times l}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari n himpunan partit dan l titik per himpunan partit. Misalkan j, l, n, s, dan t adalah bilangan-bilangan asli dengan n, s ≥ 2, maka bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ adalah bilangan asli terkecil ξ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan dari semua sisi $K_{j\times\xi}$, menggunakan dua warna merah dan warna biru, senantiasa $K_{j\times\xi}$ memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai subgraf. Dalam makalah ini, konsep bilangan Ramsey multipartit akan diperumum dengan menghilangkan sifat kelengkapan dari graf yang dikandungnya. Diberikan dua graf G dan H, bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga sebarang dua pewarnaan dengan warna merah dan warna biru pada semua sisi-sisi dari $K_{j\times t}$ senantiasa $K_{j\times t}$ memuat G merah atau H biru sebagai subgraf. Dalam makalah ini, akan dibuktikan nilai eksak dari bilangan Ramsey multipartit $m_j(P_n, K_{4\times 1})=4$ untuk $j=4$ dan $4\leq n\leq 6$; $\lfloor 3(n-1)/j \rfloor+1$ untuk $4 \leq j \leq 3(n-1)$ dan $n \geq 7$, dengan P_n adalah graf lintasan n titik.

Keywords: Bilangan Ramsey multipartit ukuran, graf multipartit seimbang lengkap, graf lintas.

1. PENDAHULUAN

Ramsey (1930) mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan pencarian prosedur untuk menentukan benar-tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Teori yang dikenal sebagai Teori Ramsey itu, kemudian mempunyai banyak penerapan diantaranya pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi (Espino, 2004). Dalam teori graf, teori Ramsey dapat dinyatakan sebagai berikut. Untuk setiap bilangan bulat positif m dan n, terdapat bilangan bulat positif N_0 sedemikian sehingga setiap graf F dengan N titik, dengan $N \geq N_0$, senantiasa memenuhi sifat berikut: F memuat subgraf lengkap K_m atau komplemen dari F memuat subgraf lengkap K_n.

Hingga kini baru sembilan bilangan Ramsey klasik yang ditemukan. Karena bilangan Ramsey klasik merupakan suatu masalah yang sulit untuk dikaji, maka banyak peneliti memperumum konsep dari kajian bilangan Ramsey klasik. Salah satu yang yang memperluas konsep bilangan Ramsey klasik ini adalah Hatting dan Henning pada tahun 1998 [2]. Mereka telah memberikan batas atas yang umum dari bilangan Ramsey bipartit $m_2(a,b)$ untuk sebarang bilangan asli a dan b, yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1.1.

Untuk bilangan-bilangan asli $a \geq 2$ dan $b \geq 2$, $m_2(a, b) \leq m_2(a-1, b) + m_2(a, b-1)+1$.

Pada tahun yang sama (1998) Hatting dan Henning juga mendapatkan bilangan Ramsey untuk kombinasi graf lintasan dan graf bintang dimana graf lintasan P_n adalah graf terhubung berorde n yang setiap titiknya berderajat dua kecuali kedua titik ujungnya berderajat satu, dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf terhubung berorde n+1 yang semua titiknya berderajat satu kecuali satu titik sebagai titik pusat berderajat n.

Selanjutnya, dari perumuman konsep bilangan Ramsey bipartit terus berkembang ke perumuman konsep bilangan Ramsey multipartit. Burger dan van Vuuren [1] tahun 2004, memperluas konsep bilangan Ramsey klasik sebagai berikut. Misalkan $K_{n \times l}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari n himpunan partit dan l titik per himpunan partit. Misalkan j, l, n, s, dan t adalah bilangan asli dengan n, s ≥ 2. Maka bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan asli terkecil ξ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan dari semua sisi pada graf $K_{j \times \xi}$, dengan menggunakan dua warna, sebut warnah merah dan warna biru, senantiasa graf $K_{j \times \xi}$ akan memuat $K_{n \times l}$ merah atau $K_{s \times t}$ biru sebagai subgraf.

Dengan menghilangkan sifat kelengkapan dari graf yang dikandung yaitu kombinasi dua graf dari suatu bilangan Ramsey, diperoleh definisi berikut.

Misalkan $j \geq 2$ adalah bilangan asli. Untuk sebarang graf G dan graf H, bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga sebarang dua pewarnaan, sebut warna merah dan warna biru, pada semua sisi dari graf $K_{j\times t}$, senantiasa akan memuat G merah atau H biru sebagai subgraf.

Burger dan Vuuren [1] juga mendapat nilai eksak beberapa bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi dua graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil yang diberikan teorema berikut.

Teorema 1.2.

(1) $m_1(K_{2\times 2}, K_{3\times 1}) = m_2(K_{2\times 2}, K_{3\times 1}) = \infty$.

(2) $m_3(K_{2\times 2}, K_{3\times 1})=3$ *dan* $m_4(K_{2\times 2}, K_{3\times 1})=2$.

(3) $m_5(K_{2\times 2}, K_{3\times 1})=m_6(K_{2\times 2},K_{3\times 1})=2$.

(4) $m_j(K_{2\times 2}, K_{3\times 1})=1$ *untuk semua* $j \geq 7$.

Baru-baru ini, Syafrizal Sy dkk. (lihat [4], [5], [6]) memperoleh bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_n,G)$ dengan G merupakan graf lintasan P_n, graf roda W_n, graf bintang S_n, graf kipas F_n, graf kincir M_n, dan graf lingakaran C_n.

2. BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UKURAN UNTUK GRAF LINTASAN DAN GRAF BIPARTIT

Kajian utama pada makalah ini adalah diberikan dalam teorema berikut yaitu membuktikan bilangan Ramsey multipartit untuk kombinasi graf lintasan P_n dan graf lengkap dengan empat titik. Sebelumnya, didefinisikan $P:={}_aP_b$ adalah suatu graf lintasan dengan titik-titik ujungnya adalah a dan b yang akan digunakan pada pembuktian Teorema 3.1.

Teorema 3.1.

Untuk bilangan bulat $b \geq 2$, $m_4(P_3, K_{2\times b}) = \left\lceil \frac{3b-2}{4} \right\rceil$.

Bukti:

Kasus 1. Untuk b=2.

Jelas bahwa, $m_4(P_3, K_{2\times b}) \geq 1$. Untuk menunjukkan bahwa $m_4(P_3, K_{2\times b}) \leq 1$. $m_4(P_3, K_{2\times 2}) \leq 1$, perhatikan $F \cong K_{4\times 1}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sebarang faktorisasi dari F dengan F_1 tidak memuat P_3. Jadi, F_1 merupakan suatu subgraf dari $2K_2$ karena $F_1 \not\supseteq P_3$. Akibatnya, F_2 akan memuat $K_{2\times 2}$. Oleh karena itu, $m_4(P_3, K_{2\times 2}) \leq 1$.

Kasus 2. Untuk $b \geq 3$.

Misalkan $r = \left\lceil \frac{3b-2}{4} \right\rceil$. Akan ditunjukkan bahwa $m_4(P_3, K_{2\times b}) \geq r$. Perhatikan $G \cong K_{4\times(r-1)}$ Misalkan $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_{r-1}\}, C = \{c_1, c_2, \cdots, c_{r-1}\}$ dan $A = \{d_1, d_2, \cdots, d_{r-1}\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari G. Misalkan $E(G_1) = \{a_1b_1, c_1d_1, a_2d_2, b_2c_2, a_3c_3, b_3d_3, a_4b_4, c_4d_4, a_5d_5, b_5c_5$ $a_6c_6, b_6d_6, \cdots, a_{r-3}b_{r-3}, c_{r-3}d_{r-3}, a_{r-2}d_{r-2}, b_{r-2}c_{r-2}, a_{r-1}c_{r-1}, b_{r-1}, d_{r-1}\}$ ada h suatu himpunan sisi-sisi dari G_1.

Misalkan G_2 adalah komplemen dari G_1 relatif terhadap G. Jelas bahwa, G_1 tidak memuat P_3. Karena orde titik dari setiap himpunan partit adalah r-1 maka terdapat 2(r-1) sisi di G_1. Jadi, terdapat paling banyak $e^* = \left\lceil \frac{r-1}{3} \right\rceil$ sisi yang menghubungkan titik-titik dari sebarang dua himpunan partit, sebut A dan B, di G_1. Misalkan berturut-turut A_1 dan B_1 adalah subhimpunan partit dari A dan B dengan A_1 dan B_1 membentuk himpunan sisi yang saling lepas (*matching*) sempurna yang berukuran e^* di G_1. Perhatikan $T \subseteq ((A \cup B)\backslash(A \cup B))$dengan $|T| = b - 2e^*$. Misalkan $N(T)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan T di G_1. Karena G_1 merupakan *matching* sempurna, maka terdapat $|T|$ titik yang termuat dalam $N(T) \subseteq (C \cup D)$, sedemikian sehingga $|C| + |D| - |N(T)| = 2(r-1) - (b - 2e^*) = b^*$. Jadi, $K_{2\times b}$ merupakan graf multipartit seimbang lengkap terbesar di G_2. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
b &= 2(r-1) - (b - 2e^*) \\
&= 2r + 2e^* - 2 - b \\
&= 2(r + \left\lceil \tfrac{r-1}{3} \right\rceil - 1) - b \\
&= 2(r + \left\lceil \tfrac{3b-2}{4} \right\rceil + \left\lceil \tfrac{\lceil (3b-2)/4 \rceil - 1}{3} \right\rceil - 1) - b \\
&< b \quad \text{untuk sebarang bilangan asli } b.
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $G_2 \not\supseteq K_{2\times b}$ karena $b^* < b$. Oleh karena itu, $m_4(P_3, K_{2\times b}) \geq r$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_4(P_3, K_{2\times b}) \leq r$. Perhatikan $F \cong K_{4\times r}$. Misalkan $F_1 \oplus F_2$adalah sebarang faktorisasi dari F dengan $P_3 \not\subseteq F_1$. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa F_1 merupakan *matching* sempurna. Akan ditunjukkan bahwa $K_{2\times b} \subseteq F_2$. Jelas bahwa, $E(F_1) = 2r$. Karena F_1 terdiri dari empat himpunan partit dengan $E(F_1) = 2r$, maka terdapat dua himpunan partit, sebut himpunan partit U dan himpunan partit W, yang dihubungkan oleh paling sedikit $e = \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil$ sisi. Misalkan U_1dan W_1 berturut-turut adalah subhimpunan dari Udan W, dengan U_1dan W_1 membentuk suatu *matching* sempurna berukuran e.

Kemudian, perhatikan $Y \subseteq ((U \cup W) \setminus (U_1 \cup W_1)$ dengan $|Y| = b - 2e$. Misalkan $N(Y)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan Y di G_1. Jadi, terdapat Y titik yang termuat dalam $X \subseteq V(F) \setminus (U \cup W \cup N(Y))$ karena G_1 merupakan *matching* sempurna. Akibatnya, $|X| = 2r - (b - 2e) = 2(r + e) - b$. Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
|X| &= 2(r + e) - b \\
&= 2\left(r + \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil\right) - b \\
&= 2\left(\left\lceil \frac{3b-2}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{\lceil (3b-2)/4 \rceil}{3} \right\rceil\right) - b \\
&\geq b \quad \text{untuk sebarang bilangan asli } b.
\end{aligned}
$$

Jadi, titik-titik di $Y \cup U_1 \cup W_1$ dan X ini akan membentuk $K_{2\times b}$ di F_2. Oleh karena itu, $m_4(P_3, K_{2\times b}) \leq r$..

3. KESIMPULAN

Pada makalah ini, telah dibuktikan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf lintasan dan graf bipartit lengkap. Kesimpulan yang didapat adalah semakin besar jumlah himpunan partit, semakin kecil nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukurannya dari semua kombinasi sebarang graf.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kami ucapkan kepada Prof. Edy Tri Baskoro, Dr. Saladin Uttunggadewa, dan Dr. Hilda Assiyatun yang telah membimbing penulis hingga dapat melakukan penelitian mandiri.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burger A.P. and van Vuuren J.H. 2004. Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part II: Size Numbers, Discrete Math. 283, 45-49.

[2] Hattingh J.H. and Henning M.A. 1998. Bipartite Ramsey theory. Utilitas Math. 53, 217-230.

[3] Hattingh J.H. and Henning M.A. 1998. Star-path bipartite Ramsey numbers. Discrete Math. 185, 255-258.

[4] Syafrizal Sy, Baskoro E.T, and Uttunggadewa S. 2005. The Size Multipartite Ramsey Numbers for Paths, J. Combin. Math. Combin. Comput.. 55, 103-107.

[5] Syafrizal Sy, Baskoro E.T., and Uttunggadewa S. 2007. The size multipartite Ramsey numbers for small paths versus other graphs, Far East J. Appl. Math, Issue 1, 131-138.

[6] Syafrizal Sy, Baskoro E.T, Uttunggadewa S. and Assiyatun H. 2009. Path-path size multipartite Ramsey numbers, J. Combin. Math. Combin. Comput. 71, 265-271.