ANALISIS MULTI RESOLUSI

I Made Arnawa *dan* ***Admi Nazra***

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Andalas

ABSTRACT

In this paper, we will discuss Multiresolution Analysis (MRA), especially 1-dimensional MRAs, and their properties. After that, we will discuss how to construct a 1-dimensional wavelet if we have a 1-dimensional MRA.

PENDAHULUAN

Dalam menghadapi suatu persoalan tertentu, sebenarnya kita berhadapan dengan banyak sisi atau representasi dari persoalan tersebut. Sebagai contoh, kita dapat menyatakan bilangan dalam berbagai sistem bilangan menurut keperluan kita; dalam kehidupan sehari-hari kita memakai sistem bilangan desimal, sedangkan untuk pemakaian pada komputer kita memakai sistem bilangan biner. Akibatnya dalam suatu persoalan, misalnya dalam pemrosesan sinyal, yang terlebih dahulu harus diusahakan adalah menentukan representasi sinyal yang bersesuaian dengan keperluan kita. Sebagai contoh dalam telepon celuler kita memerlukan representasi sinyal yang memberikan keistimewaan tertentu.

Cara untuk memperoleh reprentasi tertentu suatu sinyal adalah dengan menyusun sinyal f atas dasar sinyal-sinyal dasar f_i sebagai berikut: $f = \sum f_i$. Sebagai contoh, dalam pengolahan citra, f_i dapat menyatakan tingkat keabuan gambar disuatu cuplikan kecil citra. Salah satu alat untuk memperoleh representasi suatu sinyal adalah menggunakan transformasi Fourier [A. Cohen dan J. Kovacevic,1996]

Cara lain untuk memperoleh representasi suatu sinyal, khususnya dalam kompresi citra adalah dengan menggunakan transformasi wavelet [St. Budi Waluya,1997].

Dibandingkan dengan transformasi Fourier, transformasi wavelet mempunyai beberapa kelebihan, yaitu terutama sifat lokalisasi dari wavelet (G. Strang, 1993).

Wavelet Haar, merupakan wavelet yang ditemukan tahun 1910 oleh Haar secara kebetulan. Masalahnya bagaimana kita dapat memperoleh wavelet Haar dan wavelet lainnya melalui penurunan matematika. Salah satu cara memperoleh wavelet melalui penurunan matematika adalah dengan menggunakan Analisis Multi Resolusi (AMR). Pada makalah ini akan dibahas konsep dasar AMR dan sifat-sifatnya.

Konsep Dasar AMR

Definisi 1 Keluarga subruang tutup $\{V_j: j \in Z\}$ dari $L^2(R)$ yang memenuhi:

[A1] $V_j \subset V_{j+1}, \ \forall j \in Z$

[A2] $\overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R)$

[A3] $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$

[A4] $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \ \forall j \in Z$

[A5] Ada $\phi \in V_0$, disebut fungsi skala sehingga $\{\phi(x-k): k \in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_0.

Disebut AMR pada $L^2(R)$.

Selanjutnya misalkan keluarga $\{V_j: j \in Z\}$ merupakan suatu AMR pada $L^2(R)$. Dari Definisi 1 dapat kita turunkan beberapa sifat sebagai berikut.

Teorema 1 Misalkan $k \in Z$. Maka $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$

bukti: Misalkan $f(x) \in V_0$.

Karena [A5] maka $f(x) = \sum_{m \in Z} \langle f(x), \phi(x-m) \rangle \phi(x-m)$

Sehingga setiap $k \in Z$ berlaku

$$\begin{aligned}
f(x-k) &= \sum_{m \in Z} \langle f(x-k), \phi(x-k-m) \rangle \phi(x-k-m) \\
&= \sum_{m \in Z} \int_R f(x-k)\, \overline{\phi(x-k-m)}\, dx\, \phi(x-k-m) \\
&= \sum_{m \in Z} \int_R f(y)\, \overline{\phi(y-m)}\, dy\, \phi(x-k-m) \qquad , \ y = x-k \\
&= \sum_{m \in Z} \langle f(y), \phi(y-m) \rangle \phi(x-k-m) \\
&= \sum_{m \in Z} \langle f(x), \phi(x-m) \rangle \phi(x-k-m)
\end{aligned}$$

Sementara itu

$$\langle f(x\text{-}k),\ \phi(x\text{-}k\text{-}m)\rangle = \int_R f(x-k)\overline{\phi(x-k-m)}\,dx$$

$$= \int_R f(y)\overline{\phi(y-m)}\,dy \qquad , y = x - k$$

$$= \langle f(y),\ \phi(y\text{-}m)\rangle$$

$$= \langle f(x),\ \phi(x\text{-}m)\rangle$$

Akibatnya $f(x\text{-}k) = \sum_{m\in Z} \langle f(x-k), \phi(x-k-m)\rangle \phi(x-k-m)$

$$= \sum_{m'\in Z} \langle f(x-k), \phi(x-m')\rangle \phi(x-m') \qquad , m' = k - m$$

Karena [A5] maka $f(x\text{-}k) \in V_0$. Jadi $f(x\text{-}k) \in V_0 \quad \forall\, k \in Z$ ..(2.1)

Sebaliknya misalkan $k \in Z$ dan $f(x\text{-}k) \in V_0$.

Maka berdasarkan (2.1) diperoleh

$f(x\text{-}k\text{-}(\text{-}k)) = f(x) \in V_0$

Dengan demikian teorema 1 telah terbukti. ■

Teorema 2 Misalkan $j \in Z$. Maka $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$.

bukti: Misalkan $f(x) \in V_0$. Akan dibuktikan dengan induksi matematika. Karena (A4) maka untuk j=1 diperoleh $f(2x) \in V_1$. Misalkan berlaku untuk j=k, yaitu $f(2^k x) \in V_k$, akan ditunjukkan juga berlaku untuk j=k+1, yaitu $f(2^{k+1}x) \in V_{k+1}$. Karena $f(2^k x) \in V_k$, maka berdasarkan [A4] diperoleh $f(2^{k+1}x) \in V_{k+1}$. Jadi $f(2^j x) \in V_j \quad \forall\, j \in Z$.
Sebaliknya misalkan $j \in Z$ $j \neq 0$ dan $f(2^j x) \in V_j$. Kasus 1: $j>0$. karena $f(2^j x) = f(2\ 2^{j-1}x)$ maka berdasarkan [A4] diperoleh $f(2^{j-1}x) \in V_{j-1}$. Dengan mengulangi proses ini k kali (j-k=0) maka diperoleh $f(x) \in V_0$.
Kasus 2: $j<0$, karena $f(2^j x) \in V_j$, maka berdasarkan [A4] diperoleh $f(2\ 2^j x) = f(2^{j+1}x) \in V_{j+1}$. Dengan mengulangi proses ini k kali (j+k=0) maka akan diperoleh $f(x) \in V_0$.

Dengan demikian teorema 2 telah terbukti. ■

Teorema 3 Setiap $j,k \in Z$ berlaku $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x\text{-}2^{-j}k) \in V_j$

bukti: Misalkan $j,k \in Z$ dan $f(x) \in V_j$. Maka

$$\begin{aligned} f(x) \in V_j &\Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0 && \text{(Karena teorema 2)} \\ &\Leftrightarrow f(2^{-j}(x\text{-}k)) \in V_0 && \text{(Karena teorema 1)} \\ &\Leftrightarrow f(2^{-j}x\text{-}2^{-j}k) \in V_0 && \\ &\Leftrightarrow f(x\text{-}2^{-j}k) \in V_j && \text{(Karena teorema 2)} \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema 3 telah terbukti ■

Teorema 4 Setiap $j,k \in Z$ berlaku $f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j.\text{-}k) \in V_j$

bukti: Misalkan $j,k \in Z$ dan $f \in V_0$. Maka

$$\begin{aligned} f \in V_0 &\Leftrightarrow f(2^j.) \in V_j && \text{(Karena teorema 2)} \\ &\Leftrightarrow f(2^j(.-2^{-j}k)) \in V_j && \text{(Karena teorema 3)} \\ &\Leftrightarrow f(2^j.-k) \in V_j \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema 4 telah terbukti ■

Teorema 5 Tulis $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx-k)$, $j \in Z$, $k \in Z$. Maka setiap $j \in Z$, $\{\phi_{j,k} : k \in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_j.

bukti: Misalkan keluarga $\{\phi_{0,k} : k \in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_0 dan $j \in Z$, maka

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,m} \rangle &= \int_R 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\overline{2^{j/2}\phi(2^j x - m)}\,dx \\ &= \int_R 2^j \phi(y-k)\overline{\phi(y-m)}\,2^{-j}dy \qquad ,y = 2^j x \\ &= \int_R \phi(y-k)\overline{\phi(y-m)}\,dy \\ &= \langle \phi_{0,k}, \phi_{0,m} \rangle = \delta_{km} \end{aligned}$$

Jadi, $\{\phi_{j,k} : k \in Z\}$ merupakan himpunan ortonormal.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{\phi_{j,k} : k \in Z\}$ lengkap, yaitu dengan menunjukkan berlakunya kesamaan Parseval atau yang ekivalen dengannya. Sekarang misalkan $f \in V_j$. Maka $f(2^{-j}x) \in V_0$.

Sehingga

$$\begin{aligned} f(2^{-j}x) &= \sum_{k \in Z} \langle f(2^{-j}x), \phi_{0,k} \rangle \phi_{0,k} \\ &= \sum_{k \in Z} \langle f(2^{-j}x), \tilde{\phi}(x-k) \rangle \phi(x-k) \\ f(y) &= \sum_{k \in Z} \langle f(y), 2^j\phi(2^j y - k) \rangle \phi(2^j y - k) \qquad ,y = 2^{-j}x \\ &= \sum_{k \in Z} \langle f(y), \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \end{aligned}$$

Jadi $\{\phi_{j,k} : k \in Z\}$ lengkap.

Dengan demikian teorema 5 telah terbukti. ■

Selanjutnya karena $\phi \in V_0 \subset V_1$ dan $\{\phi_{1,k} : k \in Z\}$ adalah basis ortonormal untuk V_1, maka $\phi = \sum_{k \in Z} \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle \phi_{1,k}$. Untuk selanjutnya kita akan menggunakan barisan skala $\{s_k : k \in Z\}$ dengan $s_k = 2^{1/2} \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle$. Sehingga ϕ dapat ditulis sebagai

$\phi(x) = \sum_{k \in Z} s_k \phi(2x-k)$. Dengan memisalkan $S(\xi) = ½ \sum_{k \in Z} s_k e^{-2\pi i \xi k}$

maka kita peroleh teorema berikut.

Teorema 6 Misalkan $\hat{\phi}$ menyatakan Transformasi Fourier dari ϕ, maka $\hat{\phi}(\xi) = S(\xi/2)\,\hat{\phi}(\xi/2)$

bukti:
$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\xi) &= \int_R \phi(x) e^{-2\pi\xi x}\,dx \\
&= \int_R \sum_{k\in Z} s_k \phi(2x-k) e^{-2\pi\xi x}\,dx \\
&= \int_R \sum_{k\in Z} s_k \phi(y) e^{-2\pi\xi(1/2(y+k))}\,\tfrac{1}{2}dy \qquad ,y = 2x - k \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k\in Z} s_k e^{-\pi\xi k}\right) \int_R \phi(y) e^{-2\pi\frac{\xi}{2}y}\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k\in Z} s_k e^{-\pi\xi k}\right) \hat{\phi}(\xi/2) \\
&= S(\xi/2)\,\hat{\phi}(\xi/2)
\end{aligned}$$

Dengan demikian teorema 6 telah terbukti. ■

Teorema 7 Jika fungsi skala ϕ kontinu pada titik asal, maka $\left|\hat{\phi}(0)\right| = 1$

Teorema 8 Barisan skala $\{s_k : k \in Z\}$ untuk AMR $\{V_j : j \in Z\}$ memenuhi $\sum_{k\in Z} s_k = 2$

bukti: Dari teorema 6 kita peroleh $\hat{\phi}(\xi) = S(\xi/2)\,\hat{\phi}(\xi/2)$. Khususnya untuk $\xi = 0$, diperoleh $\hat{\phi}(0) = S(0)\,\hat{\phi}(0)$. Karena $\hat{\phi}(0) \neq 0$ (dari teorema 7), maka

$$\begin{aligned}
1 &= S(0) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{k\in Z} s_k e^{-2\pi 0 k} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{k\in Z} s_k
\end{aligned}$$

Jadi $\sum_{k\in Z} s_k = 2$

Dengan demikian teorema 8 sudah terbukti. ■

Teorema 9 Barisan skala $\{s_k : k \in Z\}$ untuk AMR $\{V_j : j \in Z\}$ memenuhi $\sum_{k\in Z} s_{k-2j}\bar{s}_k = 2\delta_{j,0}$ setiap $j \in Z$.

Teorema 8 dan Teorema 9 merupakan syarat perlu sehingga $\{s_k : k \in Z\}$ membentuk barisan skala untuk AMR $\{V_j : j \in Z\}$.

Rekonstruksi Wavelet Melalui A M R

Sekarang kita akan memakai AMR untuk memperoleh wavelet dimensi satu, yaitu khususnya wavelet Haar sebagai berikut. Misalkan $\{V_j : j \in Z\}$ suatu AMR untuk $L^2(R)$ dengan fungsi skala ϕ. Misalkan W_j komplemen ortogonal dari V_j di V_{j+1}. Maka V_{j+1} dapat ditulis sebagai jumlah langsung, yaitu

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= W_j \oplus V_j \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus \ldots\ldots \oplus W_{j-k} \oplus V_{j-k} \end{aligned}$$

untuk sebarang bilangan asli positif k.

Selanjutnya karena $V_j \to \{0\}$, untuk $j \to -\infty$, kita peroleh

$V_{j-1} = \bigoplus_{n=-\infty}^{j} W_n$, $j \in Z$, dan karena $V_j \to L^2(R)$ untuk $j \to \infty$, kita peroleh $L^2(R) = \bigoplus_{n=-\infty}^{j} W_n$. Jika terdapat fungsi ψ sedemikian sehingga $\{\psi(x-k) : k \in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk W_0, maka setiap $j \in Z$ $\{\psi_{j,k} : k \in Z\}$ dengan $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)$, $k \in Z$ membentuk basis ortonormal untuk W_j. Akibatnya $\{\psi_{j,k} : k \in Z\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(R)$. Sehingga $\psi \in L^2(R)$ yang menyebabkan $\{\psi(x-k) : k \in Z\}$ membentuk basis ortonormal untuk W_0 merupakan Wavelet induk. Selanjutnya karena $W_0 \subset V_1$ maka Wavelet ψ memenuhi $\psi(x) = \sum_{k \in Z} s_{1,k}\phi(2x - k)$ dengan $\{s_{1,k} : k \in Z\}$ barisan yang bersesuaian di $\ell^2(Z)$. Tulis $\{s_{0,k} : k \in Z\} = \{s_k : k \in Z\}$, maka dari sifat keortogonalan diperoleh

$\int_R \Psi_{i_1}(x - k)\overline{\Psi_{i_2}(x - k_2)}\, dx = \delta_{i_1,i_2}\delta_{k_1,k_2}$ dengan $\psi_0 = \phi$, $i_1, i_2 \in \{0,1\}$ dan $k_1, k_2 \in Z$. Dengan demikian barisan $\{s_{i,k} : k \in Z,\ i = 0,1\}$ haruslah memenuhi

$$\sum_{k \in Z} s_{i_1,k-2j}\overline{s_{i_2,k}} = 2\delta_{i_1,i_2}\delta_{0,j} \text{ setiap } j \in Z. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1)$$

Dengan demikian jika $\{s_{1,k} : k \in Z\}$ memenuhi (3.1) dengan $\{s_{0,k} : k \in Z\}$ merupakan barisan skala untuk ϕ, maka keluarga fungsi $\{2^{j/2}\,\psi(2^j x - k) : j,k \in Z\}$ merupakan calon Wavelet dimensi-1.

Contoh 3.1 Untuk setiap $j \in Z$ definisikan $V_j = \{f \in L^2(R) : f$ konstan pada $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$, $k \in Z\}$.

Maka keluarga $\{V_j : j \in Z\}$ memenuhi asumsi [A1] sampai dengan [A4] diatas. Kemudian misalkan $\phi = X_{[0,1]}$. Maka $\{\phi(x-k) : k \in Z\}$ membentuk basis ortonormal untuk V_0. Oleh karena itu keluarga $\{V_j : j \in Z\}$ merupakan suatu AMR dengan fungsi skala $\phi = X_{[0,1]}$.
Selanjutnya ambil barisan skala

$$s_k = \begin{cases} 1, & \text{jika } k \in \{0,1\} \\ 0, & k \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan

$$s_{1,k} = \begin{cases} 1, & \text{jika } k = 0 \\ -1, & \text{jika } k = 1 \\ 0, & \text{jika } k \text{ lainnya} \end{cases}$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa barisan $\{s_{i,k} : k \in Z\}$ $i = 0,1$ memenuhi (3.1). Dengan demikian fungsi

$$\psi(x) = \sum_{k \in Z} s_{1,k}\, \phi(2x-k) \quad \text{,yaitu}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \le x \le 1/2 \\ -1, & \text{jika } 1/2 < x \le 1 \\ 0, & \text{jika } k \text{ lainnya} \end{cases}$$

merupakan calon Wavelet. Dan Wavelet ini tidak lain adalah Wavelet Haar.

DAFTAR PUSTAKA

Cohen, A. and Kovacevic, J.,(1996) Wavelet : the Mathematical Background, *Proceedings of The IEEE* vol.84 No.4.

Daubechies, I., (1992) *Ten Lectures on Wavelets,* Volume 61 of CBMSNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM Press, Pennsylvania.

Gunawan, H., (1997) Analisis Forier dan Wavelet, Diktat kuliah MA-ITB, Bandung.

Heil, C.E., and Walnut, D. F., (1989) Continuous and Discrete Wavelet Transforms, *SIAM Review,* Vol.31 No.4.

Paula, (1999) Rekonstruksi Wavelet Melalui Analisis Multi Resolusi, Makalah, Bandung.

Strang, G., (April 1993) Wavelet Transforms Versus Fourier Transforms, *Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society* Vol 28, No. 2.

Suherman, D., (1997) Rekonstruksi Wavelet Melalui Analisis Multi Resolusi, Tesis S-2 ITB, Bandung.

Waluya, S. B., (1997) Transformasi Wavelet Kontinu Dimensi Dua, Tesis S-2 ITB, Bandung.