METODE TITIK TANGEN

I Made Arnawa

ABSTRACT

Tangent point method is one of numerical methods for root finding. This method follow a scheme that may be thought of as providing series of succesive approximations, each more precise than previous one, so that enought repetitions of the procedure eventually give an approximation which differs from the true value by less than some arbitrary error tolerance. The method of tangent point is the only one bracketing methods that specially to solve an even multiple roots.

PENDAHULUAN

Masalah-masalah sains dan teknologi sering kali berhubungan dengan pencarian akar-akar dari suatu fungsi, yaitu mencari harga-harga X dimana suatu fungsi f(X) bernilai nol. Sebelum ditemukannya komputer digital, ada beberapa cara yang disebut dengan metode langsung yang dapat dipakai untuk mencari akar-akar dari suatu fungsi, diantaranya dengan memakai rumus ABC dan dengan memfaktorkan fungsi tersebut atas faktor-faktor primanya (Chapra and Canale, 1988).

Untuk sebagian besar fungsi, misalnya untuk suatu fungsi yang kelihatannya sederhana seperti $f(X) = e^{-X} - X$, ternyata tidak dapat diselesaikan dengan metode langsung, satu-satunya alternatif dalam kasus seperti ini adalah teknik-teknik penyelesaian hampiran (Chapra and Canale, 1988).

Dengan berkembangnya komputer digital, perkembangan komputer pribadi khususnya, telah memungkinkan berkembangnya teknik-teknik penyelesaian hampiran. Beberapa teknik-teknik penyelesaian hampiran yang lebih dikenal dengan metode numerik, seperti : metode bagi dua, metode regula falsi, metode secan, dan metode Newton-Raphson, telah banyak dipakai untuk mencari akar-akar dari suatu fungsi, baik untuk fungsi-fungsi yang memang tidak dapat diselesaikan dengan metode langsung maupun untuk fungsi-fungsi yang sebetulnya dapat diselesaikan dengan metode langsung.

Secara garis besarnya, metode-metode numerik dapat dikelompokkan atas metode-metode pengurung dan metode-metode terbuka. Kedua kelompok metode ini masing-masing mempunyai kelebihan dan juga kekurangannya sendiri-sendiri.

Metode-metode pengurung adalah metode-metode yang memanfaatkan kenyataan bahwa suatu fungsi secara khas berganti tanda disekitar suatu akar. Metode-metode pengurung pada umumnya merupakan metode yang dapat menjamin bahwa akar-akar hampiran yang diberikannya akan selalu konvergen ke akar yang sebenarnya. Ini disebabkan karena metode-metode pengurung memakai dua terkaan awal yang mengurung akar sebenarnya, kemudian secara bersistem lebar kurungan dimana akar-akar sebenarnya berada makin lama makin diperkecil sebanding dengan bertambahnya jumlah iterasi yang dilakukan (Chapra and Canale, 1988). Laju kekonvergenan metode-metode pengurung relatif baik, tetapi masih kalah baik jika diban- dingkan dengan kekonvergenan metode-metode terbuka (Gerald, 1985). Yang termasuk kedalam kelompok metode-metode pengurung adalah : metode grafis, metode bagi dua, metode regula falsi, dan metode modifikasi regula falsi.

Metode-metode terbuka tidak memperdulikan apakah fungsi f(X) berganti tanda atau tidak disekitar akar, dengan demikian metode-metode terbuka mempunyai pemakaian yang lebih umum. Ini berarti bahwa metode-metode terbuka dapat juga dipakai untuk menentukan akar-akar rangkap genap atau titik-titik singgung dari suatu fungsi, dalam hal mana ini tidak dapat dilakukan oleh metode-metode pengurung. Berbeda dengan metode-metode pengurung, metode-metode terbuka tidak selalu konvergen, tetapi dalam hal metode-metode terbuka konvergen, kekonvergenannya relatif lebih baik dari metode-metode pengurung (Gerald, 1985). Yang termasuk kedalam kelompok metode-metode terbuka adalah : metode iterasi satu titik, metode Newton-Rahpson, dan metode secan.

Dalam memilih metode mana yang harus dipakai untuk mencari akar suatu fungsi, tergantung kepada karakteristik dari fungsi tersebut. Misalnya untuk fungsi-fungsi yang ber- ganti-ganti tanda disekitar akarnya dapat memilih metode- metode pengurung. Untuk fungsi-fungsi yang tidak berganti-ganti tanda disekitar akarnya, metode pengurung praktis tidak dapat dipakai, sehingga pilihan satu-satunya adalah metode-metode yang tidak selalu konvergen, yaitu metode-metode terbuka.

Berangkat dari kelemahan-kelemahan pada kedua kelompok metode yang sudah ada (metode pengurung hanya dapat dipakai untuk fungsi-fungsi yang berganti-ganti tanda dise- kitar akar, sedangkan metode terbuka walaupun mempunyai pemakaian yang umum tetapi tidak selalu konvergen) maka pada tulisan ini diajukan suatu rumusan metode yang disebut dengan metode titik tangen. Metode ini dapat dipakai untuk menangani akar-akar rangkap genap dari suatu fungsi dengan jaminan bahwa akar-akar hampirannya akan selalu konvergen ke akar yang sebenarnya.

PENURUNAN METODE TITIK TANGEN

Sebelum sampai pada penurunan rumusan metode titik tangen, terlebih dahulu akan diberikan beberapa definisi-definisi dan teorema-teorema dasar matematika yang dipakai dalam proses penurunannya. Definisi-definisi dan teorema-teorema tersebut adalah :

- Persamaan garis yang melalui dua titik (X_0,Y_0) dan (X_1,Y_1)

  adalah $$Y - Y_0 = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}(X - X_0) \qquad (1)$$

- Fungsi f(X) dikatakan monoton naik pada interval I jika hanya jika untuk setiap dua bilangan X_1 dan X_2 di dalam I dengan $X_1 < X_2$ dipenuhi $f(X_1) < f(X_2)$ (2)

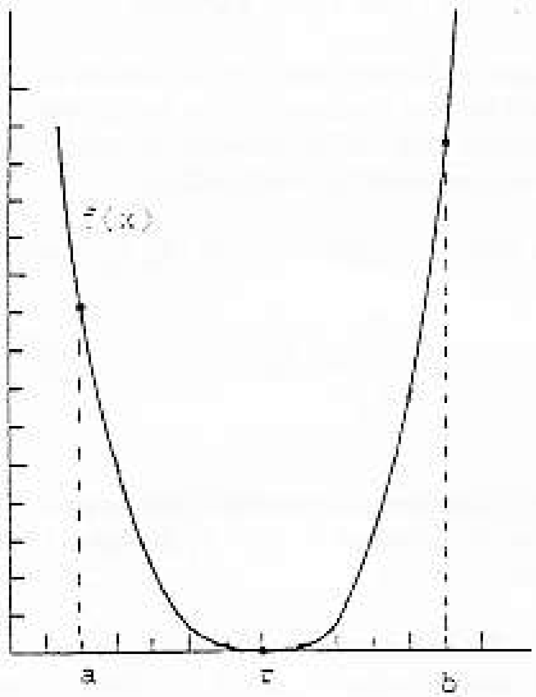
- Fungsi f(X) dikatakan monoton turun pada interval I jika dan hanya jika untuk setiap bilangan X_1 dan X_2 di dalam I dengan $X_1 < X_2$ dipenuhi $f(X_1) > f(X_2)$ (3)

- Jika f(X) diferensiabel dan $f'(X) > 0$ untuk setiap X pada interval I, maka f(X) monoton naik pada I (4)

- Jika f(X) diferensiabel dan f`(X) < 0 untuk setiap X pada interval I, maka f(X) monoton turun pada I (5)

Analisis Matematika Metode Titik Tangen

Penurunan metode titik tangen diawali dengan mengambil asumsi bahwa fungsi f(X) menyinggung sumbu X di titik r dan terbuka ke atas pada interval [a,b], seperti yang tampak pada Gambar 1. Dengan demikian menurut (2) fungsi f(X) mono-ton naik untuk setiap X > r, menurut (4) f` (X) > 0 untuk setiap X > r, menurut (3) fungsi f(X) monoton turun untuk setiap X < r, dan menurut (5) f`(X) < 0 untuk setiap X < r. Karena a < r maka menurut (5) f`(a) < 0 . b > r maka menurut (4) f`(b) > 0. Dengan demikian, interval [a,b] akan mengurung titik singgung jika f`(a) f`(b) < 0. (6)



Gambar 1. **Fungsi f(x) terbuka ke atas pada interval [a,b] dan mempunyai titik singgung di r**

Algoritma Metode Titik Tangen

Iterasi ke - n (n = 1, 2, 3, ...)

(i) tentukan persamaan garis yang melali (a,f(a)) dan (b,0) serta persamaan garis yang melalui (a,0) dan (b,f(b))
(ii) tentukan absis dari perpotongan kedua garis pada (i), dan misalkan absisnya adalah r_n
(iii) nyatakan r_n sebagai hampiran ke-n untuk r.

Hampiran ke-n untuk r diperoleh dari penurunan berikut :

Menurut **(1)** persamaan garis yang melalui (a,f(a)) dan (a,0)

adalah $Y - 0 = \dfrac{f(a) - 0}{a - b}(x - b)$

$$Y = \frac{f(a)}{a - b}(x - b) \qquad \textbf{(7)}$$

Menurut **(1)** persamaan garis yang melalui (a,0) dan (b,f(b))

adalah $Y - 0 = \dfrac{f(b) - 0}{b - a}(x - a)$

$$Y = \frac{f(b)}{b - a}(x-a) \qquad \textbf{(8)}$$

Absis perpotongan persamaan garis **(7)** dengan garis **(8)** diperoleh dengan penyelesaian persamaan **(7)** = **(8)**. Hasilnya,

$$X = \frac{b \,.\, f(a) - a \,.\, f(b)}{f(a) - f(b)}$$

sehingga hampiran ke-n untuk r adalah $r_n = x$. Secara grafis hasil dari iterasi pertama dapat dilihat pada Gambar 2. Penerapan metode titik tangen dalam menentukan titik singgung suatu fungsi dengan mengambil beberapa nilai awal, hasilnya disajikan iterasi demi iterasi pada tabel 1 berikut ini.

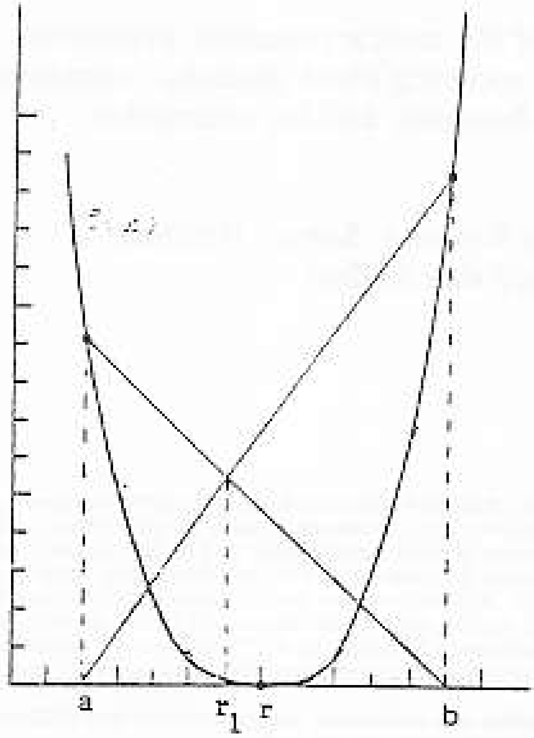
Tabel 1. **Hasil hampiran metode titik tangen untuk fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 4$ untuk beberapa nilai awal**

Nilai awal : a=1.5 ; b=3.5		Nilai awal : a=1.7; b=3.2	
Iterasi	Titik singgung	Iterasi	Titik singgung
1	1.7	1	1.788235
2	1.769231	2	1.830873
3	1.809249	3	1.857539
4	1.836156	4	1.876197
5	1.855773	5	1.890139
6	1.870835	6	1.901026
7	1.882826	7	1.909803
8	1.892634	8	1.917051
9	1.900828	9	1.923152
10	1.907788	10	1.928367
11	1.913782	11	1.932882
12	1.919005	12	1.936834
13	1.923601	13	1.940324
14	1.92768	14	1.943432
15	1.931327	15	1.946218

KESIMPULAN DAN SARAN

Metode titik tangen memerlukan dua terkaan awal yang mengurung akar, dengan demikian metode titik tangen dapat dikelompokkan pada metode-metode pengurung. Oleh karena metode titik tangen termasuk pada kelompok metode-metode pengurung, maka metode titik tangen dapat menjamin bahwa akar-akar hampiran yang diberikannya akan selalu konvergen ke akar yang sebenarnya. Perumusan metode titik tangen tidak berdasarkan bahwa suatu fungsi berganti-ganti tanda disekitar akar, dengan demikian metode titik tangen dapat dipakai untuk menangani fungsi-fungsi yang pada umumnya hanya dapat ditangani dengan metode-metode terbuka.

Dari beberapa hasil uji coba, dapat disarankan bahwa metode titik tangen sebaiknya dipakai kalau penekanannya hanya pada kekonvergenannya dan bukan pada laju kekonvergenan yang dapat diberikannya.



Gambar 2. **Hasil hampiran ke 1 metode titik tangen**

DAFTAR PUSTAKA

Bisuni, H. 1986. *Kalkulus*. Universitas Indonesia Press. Jakarta.

Canale and Chapra. 1988. *Numerical Methods For Engineers*. 2nd ed. Mc Graw Hill. London.

Gerald, F. 1985. *Applied Numerical Analysis*. 3rd ed. Addison-Wesley. California.

Hutahaean. 1983. *Kalkulus Diferensial dan Integral*. Gramedia. Jakarta.