UJI KETERKONTROLAN SISTEM DESKRIPTOR KONTINU BEBAS WAKTU

Muhafzan, Dodi Devianto, Ishak
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas

ABSTRAK

Artikel ini mengemukakan kriteria pengujian keterkontrolan sistem deskriptor kontinu bebas waktu yang berbentuk sebagai berikut :

$$E\,\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(0) = x_0,\ 0 \le t \le b$$

dengan A dan B adalah matriks-matriks riel, sedangkan E adalah matriks-matriks singular. Kriteria pengujian dirumuskan dengan terlebih dahulu menyelesaikan sistem deskriptor tersebut dan analisa selanjutnya menggunakan metoda aljabar linier.

1. Pendahuluan

Teori kontrol merupakan salah satu bidang Matematika Terapan yang dewasa ini sangat berkembang pesat. Sejak dikembangkannya teori ini oleh Kalman (1960), aplikasi teori kontrol telah meluas ke berbagai bidang terutama dalam industri. Umpamanya, untuk menghasilkan produk yang bermutu tinggi, suatu industri jelas memerlukan proses kontrol yang cukup ketat terhadap sistem produksinya. Namun untuk melakukan proses kontrol tersebut, terlebih dahulu harus dibangun sistem pengontrol yang cukup ampuh.

Persoalan utama dalam teori kontrol adalah mencari suatu pengontrol yang dapat merubah situasi sistem

$$\dot{x}(t) = f(\,x(t), u(t), t) \qquad \text{....................(1)}$$

dengan x menyatakan vektor situasi
u menyatakan vektor kontrol
t menyatakan vektor waktu,

dari situasi tertentu menjadi situasi yang diinginkan, (Gopal,M.,1987).

Namun demikian sebelum merancang pengontrol untuk suatu sistem, terlebih dahulu harus diketahui apakah sistem tersebut dapat dikontrol (terkontrol) atau tidak. Dengan kata lain pengujian keterkontrolan suatu sistem merupakan syarat untuk merancang pengontrol (alat kontrol) yang diperlukan.

Penelitian ini mengemukakan suatu sistem yang berbentuk sebagai berikut:

$$E\,\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(0) = x_0,\ 0 \le t \le b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dimana $x \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor situasi (keadaan),

$u \in \mathbb{R}^k$ menyatakan vektor kontrol,

E, A dan B adalah matriks-matriks riel dengan ukuran yang bersesuaian dan E adalah matriks riel singular.

Sistem (2) disebut sebagai sistem deskriptor kontinu (Sincovec, R.F, dkk,1981), yang merupakan suatu model riel pada suatu industri elektronik.

Jika E nonsingulir atau $\det(E) \neq 0$, maka sistem (2) dapat ditulis sebagai,

$$\dot{x}(t) = A_0\,x(t) + B_0\,u(t), \qquad x(0) = x_0,\ 0 \le t \le b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

dengan $A_0 = E^{-1}A$ dan $B_0 = E^{-1}B$.

Dalam teori kontrol, sistem (3) sering disebut sebagai representasi ruang situasi (keadaan). Agar sistem (3) terkontrol, maka harus dipenuhi rang$[B_0,\ A_0B_0,\ A_0^2B_0, \ldots,\ A_0^{n-1}B_0] = n$ (Gopal,M.,1987)

Dari survey yang telah tim peneliti lakukan sampai saat ini, untuk sistem deskriptor (2) belum ditemukan kriteria keterkontrolan yang memadai. Dengan demikian yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah:

a) Mengkonstruksi kriteria keterkontrolan sistem deskriptor (2) dengan E matriks riel singular dan semua matriks koefisiennya bebas waktu.

b) Membandingkan kriteria yang diperoleh dengan kriteria sistem (3).

2. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Berdasarkan uraian pada bagian pendahuluan maka tujuan penelitian ini adalah menentukan kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu (2) dengan E matriks riel singular dan semua matriks koefisiennya bebas waktu.

dari situasi tertentu menjadi situasi yang diinginkan, (Gopal,M.,1987).

Namun demikian sebelum merancang pengontrol untuk suatu sistem, terlebih dahulu harus diketahui apakah sistem tersebut dapat dikontrol (terkontrol) atau tidak. Dengan kata lain pengujian keterkontrolan suatu sistem merupakan syarat untuk merancang pengontrol (alat kontrol) yang diperlukan.

Penelitian ini mengemukakan suatu sistem yang berbentuk sebagai berikut:

$$E\,\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(0)=x_0,\ 0\le t\le b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dimana $x \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor situasi (keadaan),

$u \in \mathbb{R}^k$ menyatakan vektor kontrol,

E, A dan B adalah matriks-matriks riel dengan ukuran yang bersesuaian dan E adalah matriks riel singular.

Sistem (2) disebut sebagai sistem deskriptor kontinu (Sincovec, R.F, dkk,1981), yang merupakan suatu model riel pada suatu industri elektronik.

Jika E nonsingulir atau $\det(E)\neq 0$, maka sistem (2) dapat ditulis sebagai,

$$\dot{x}(t) = A_0\,x(t) + B_0\,u(t), \qquad x(0)=x_0,\ 0\le t\le b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

dengan $A_0=E^{-1}A$ dan $B_0=E^{-1}B$.

Dalam teori kontrol, sistem (3) sering disebut sebagai representasi ruang situasi (keadaan). Agar sistem (3) terkontrol, maka harus dipenuhi rang$[\,B_0,\ A_0B_0,\ A_0^2B_0,\ldots,\ A_0^{n-1}B_0]=n$ (Gopal,M.,1987)

Dari survey yang telah tim peneliti lakukan sampai saat ini, untuk sistem deskriptor (2) belum ditemukan kriteria keterkontrolan yang memadai. Dengan demikian yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah:

a) Mengkonstruksi kriteria keterkontrolan sistem deskriptor (2) dengan E matriks riel singular dan semua matriks koefisiennya bebas waktu.
b) Membandingkan kriteria yang diperoleh dengan kriteria sistem (3).

2. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Berdasarkan uraian pada bagian pendahuluan maka tujuan penelitian ini adalah menentukan kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu (2) dengan E matriks riel singular dan semua matriks koefisiennya bebas waktu.

Dari penelitian ini diharapkan:

a) Bagi para pengguna matematika, khususnya dunia industri yang memakai sistem deskriptor (2) sebagai suatu alat, dapat menggunakan kriteria yang diperoleh dalam penelitian ini sebelum merancang pengontrol untuk sistem deskriptor tersebut.

b) Bagi perkembangan ilmu matematika, hasil ini merupakan kontribusi penting dalam aplikasi matematika, khususnya bidang kontrol matematis.

3. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini merupakan kelanjutan penelitian terhadap pencarian solusi sistem deskriptor kontinu (Muhafzan, 1999).

Perhatikan kembali sistem deskriptor (2). Dengan menggunakan transformasi yang sesuai sistem deskriptor (2) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= E_1\, x_1(t) + B_1\, u(t) \\ E_2 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + B_2\, u(t) \end{aligned} \qquad \text{.....................(4)}$$

dengan E_2 matriks nilpoten $n_1 \times n_1$,

E_1 matriks $n_1 \times n_1$,

B_1 matriks $n_1 \times k$,

B_2 matriks $n_2 \times k$,

$x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ dan $u(t) \in \mathbb{R}^k$. (Muhafzan,1999).

Sehingga solusi sistem (4) adalah

$$x_1(t) = e^{tE_1}\, x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)E_1} B_1\, u(s)\, ds$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} E_2^i B_2\, u^{(i)}(t) \quad \text{(Muhafzan,1999).}$$

Solusi numerik sistem deskriptor (2) telah diselidiki oleh Sincovec, dkk (1981). Untuk sistem deskriptor diskrit, Lewis (1985), telah menyelidiki kriteria keterkontrolannya.

Berikut ini dikemukakan beberapa istilah yang sering dipakai yang diambil dari Lewis (1985) dalam menentukan kriteria keterkontrolan sistem deskriptor diskrit.

Definisi. Sistem Deskriptor (2) dikatakan terkontrol lengkap jika sembarang keadaan yang diinginkan dapat dicapai dari sebarang keadaan awal. (Lewis,1985).

Definisi. Misalkan I_e adalah himpunan keadaan awal yang diperkenankan dan $R(\overline{x})$ adalah himpunan keadaan yang dinginkan dari $\overline{x} \in I_e$. Sistem Deskriptor (2) dikatakan terkontrol pada $R(\overline{x})$ jika sebarang keadaan di $R(\overline{x})$ dapat dicapai dari sebarang keadaan awal yang diperkenankan (Lewis,1985).

Selanjutnya definisikan notasi $\langle \,.\, | \,.\, \rangle$ untuk suatu pasangan matriks (E,B) sebagai berikut

$$\langle E|B \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Im}(E^i B)$$

dengan E adalah matriks nxn dan B matriks nxk.

Definisi. Misalkan x_0 adalah keadaan awal sebarang titik awal $t_0 = 0$. Keadaan x_1 dikatakan dapat dicapai dari keadaan x_0 jika terdapat $t_1 > 0$ dan $u \in U$ sehingga untuk solusi $x(t)$ yang berkaitan dengan u berlaku $x(0)= x_0$ dan $x(t_1)= x_1$ (Lewis,1985).

4. Metoda Penelitian

Untuk mengkonstruksi kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu, sesuai dengan tujuan penelitian, maka dilakukan cara berikut:

1. Tentukan solusi sistem deskriptor kontinu. Untuk itu lihat pada makalah Muhafzan (1999).
2. Rumuskan secara eksplisit himpunan keadaan awal dan himpunan keadaan yang ingin dicapai.
3. Gunakan beberapa kaidah aljabar linier untuk merumuskan kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu.
4. Kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu diungkapkan dalam sebuah teorema.
5. Lakukan simulasi terhadap suatu kasus, menggunakan software maple.

5. Hasil dan Pembahasan

Untuk menyelesaikan penelitian ini, terlebih dahulu sistem deskriptor (2) diselesaikan. Dengan menggunakan transformasi laplace, persamaan (2) dapat dipisahkan menjadi dua subsistem, yakni :

$$\dot{x}_1(t) = E_1\, x_1(t) + B_1\, u(t)$$
$$E_2\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2\, u(t)$$

Sehingga solusi sistem deskriptor (2) adalah

$$x_1(t) = e^{tE_1}\, x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)E_1} B_1\, u(s)\, ds$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2^i B_2\, u^{(i)}(t)$$

dengan $u^{(i)}$ menyatakan turunan ke-i dari u.

Untuk sistem ruang keadaan, setiap vektor di $\mathbb{R}^{n_1}$ dapat berperan sebagai keadaan awal yang diperkenankan, namun tidak demikian halnya dengan sistem deskriptor. Jika diambil $u = \{u(t) \mid u(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $u(t)$ terdiferensial sedikitnya m-1 kali $\}$, maka himpunan keadaan awal yang diperkenankan di $t_0=0$ untuk sistem deskriptor (2) adalah

$$I_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \middle| x_{01} \in \mathbb{R}^{n_1},\ x_{02} = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2^{\,i} B_2 u^{(i)}(0), u \in U \right\}$$

Dengan menggunakan teknik-teknik aljabar linier dapat dibuktikan keabsahan teorema berikut ini, yaitu tentang himpunan keadaan yang ingin dicapai.

Teorema.

Misalkan $I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \middle| x_{01} = 0,\ x_{02} = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2^{\,i} B_2 u^{(i)}(0), u \in U \right\}$.

1. Jika $x_0 \in I_0$, maka $R(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| y_1 \in \langle E_1 | B_1 \rangle, y_2 \in \langle E_2 | B_2 \rangle \right\}$

2. Jika $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \in I_c$, maka

   $R(\bar{x}) = R(x_0) + H(\bar{x})$ dengan $x_0 \in I_0$ dan

$$H(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| z_1 \in e^{E_1 t}\bar{x}_1, t > 0, 0 \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}$$

3. Himpunan keadaan yang ingin dicapai secara lengkap adalah

$$\bigcup_{\bar{x} \in I_0} R(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| y_1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ y_2 \in \langle E_2 | B_2 \rangle \right\}$$

Hasil berikut merupakan kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu yang diperoleh melalui proses analisis matematika.

Teorema.

1. Sistem deskriptor (2) terkontrol lengkap jika dan hanya jika $R(x_0) = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ dengan $x_0 \in I_0$.
2. Sistem deskriptor (2) terkontrol-R jika dan hanya jika $\langle E_1 | B_1 \rangle = \mathbb{R}^{n_1}$.

Bukti 1.

($\Rightarrow$) Misalkan sistem (2) terkontrol lengkap. Maka sebarang keadaan di $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ dapat dicapai dari sebarang keadaan awal yang diperkenankan. Jelas bahwa $R(x_0) \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

Berikutnya ambil $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ keadaan sebarang dan misalkan $x_0 \in I_0$. Karena (2) terkontrol lengkap maka $\bar{x} \in R(x_0)$. Akibatnya $\mathbb{R}^{n_1+n_2} \subseteq R(x_0)$. Dengan demikian $R(x_0) = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\bar{x}$ keadaan awal sebarang. Menurut teorema sebelumnya berlaku

$$\begin{aligned} R(\bar{x}) &= R(x_0) + H(\bar{x}) \\ &= \mathbb{R}^{n_1+n_2} + H(x) \\ &= \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \text{ karena } H(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya ambil $y \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ keadaan sebarang. Karena $\mathbb{R}^{n_1+n_2} = R(\bar{x})$, maka $y \in R(\bar{x})$. Ini berarti keadaan y tercapai dari $\bar{x}$. Karena y sebarang, maka y terkontrol lengkap.

Bukti 2.

($\Rightarrow$) Jelas bahwa $\langle E_1|B_1\rangle \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$. Berikutnya akan dibuktikan $\mathbb{R}^{n_1} \subseteq \langle E_1|B_1\rangle$. Ambil $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ sebarang dan pilih $y_2 \in \langle E_1|B_1\rangle$ sedemikian sehingga $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \bigcup_{x \in I_c} R(\overline{x})$. Misalkan $x_0 \in I_0$. Karena (2) terkontrol-R, maka $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dapat dicapai dari keadaan awal x_0, atau $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R(x_0)$. Ini berarti bahwa $y_1 \in \langle E_1|B_1\rangle$ dan $y_2 \in \langle E_2|B_2\rangle$. Jadi $\mathbb{R}^{n_1} \subseteq \langle E_1|B_1\rangle$, sehingga terbukti bahwa $\mathbb{R}^{n_1} = \langle E_1|B_1\rangle$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\langle E_1|B_1\rangle = \mathbb{R}^{n_1}$ dan misalkan pula $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in I_c$ suatu keadaan awal yang diperkenankan. Berikutnya ambil $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R(\overline{x})$ keadaan sebarang dan misalkan $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in I_c$ keadaan awal yang diperkenankan sebarang. Akan dibuktikan bahwa $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R(z)$. Karena $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R(\overline{x})$ maka $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{tE_1}\overline{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $t>0$, $\overline{y}_1 \in \langle E_1|B_1\rangle$ dan $\overline{y}_2 \in \langle E_2|B_2\rangle$. Karena $\langle E_1|B_1\rangle = \mathbb{R}^{n_1}$ dan $z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, maka $\overline{y}_1$ dapat dituliskan sebagai $\overline{y}_1 = \overline{w}_1 + e^{tE_1}z_1$ untuk suatu $\overline{w}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ dan $t>0$. Akibatnya

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 + e^{tE_1}z_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{tE_1}\overline{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 + e^{tE_1}\overline{x}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{tE_1}z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa $w_1 + e^{tE_1}x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, tetapi mengingat $\langle E_1|B_1\rangle = \mathbb{R}^{n_1}$ maka $\overline{w}_1 + e^{tE_1}\overline{x}_1 \in \langle E_1|B_1\rangle$. Ini berarti bahwa $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R(z)$. Karena $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dan z keduanya sebarang, maka sistem deskriptor (2) terkontrol-R.

Dalam situasi nyata teorema ini sangat sulit untuk diterapkan. Namun demikian sebagai akibat dari teorema ini diperoleh hasil berikut yang dapat dibuktikan dengan mudah menggunakan metoda aljabar linier.

Teorema.

1. Sistem deskriptor (2) terkontrol lengkap jika dan hanya jika rang(S_1)$=n_1$ dengan $S_1 = \left[B_1 \middle| E_1 B_1 \middle| \ldots \middle| E_1^{n_1 - 1} B_1 \right]$ dan rang(S_2)$=n_2$ dengan $S_2 = \left[B_2 \middle| E_2 B_2 \middle| \ldots \middle| E_2^{m_2 - 1} B_2 \right]$.
2. Sistem deskriptor (2) terkontrol-R jika dan hanya jika rang(S_1)$=n_1$ dengan S_1 seperti pada bagian (1).

6. Studi Kasus

Perhatikan sistem deskriptor berikut ini

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 31 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proses penyelesaian kasus ini menggunakan paket program MAPLE. Programnya adalah sebagai berikut ini :

```
> restart:with(linalg):
> E:=linalg[matrix] (5,5,[0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]);
> evalm(E&*E);
> A:=linalg[matrix] (5,5, [1,0,31,0,0,0,1,3,0,1,1,0,0,2,1,0,0,1,3,0,0,0,0,0,1]);
> #A:=matrix([[1,0,31,0,0], [0,1,3,0,1], [1,0,0,2,1], [0,0,1,3,0], [0,0,0,0,1]]);
> det(A);
> evalm(s*E-A);
> factor(simplify(det(evalm(s*E-A))));
Ambil c=0
> s:=0;
```

```
> h:=evalm(s*E-A);
> inverse(h);
> dl:=evalm(inverse(h)&*E);
> Id:=linalg[matrix] (5,5, [1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1]);
> evalm(lmbda*Id-dl);
> factors(simplify((charpoly(dl,lambda))));
> eigenvals(dl);
> eigenvectors(dl);
> X:=linalg[matrix] (5,1,[x1, x2, x3, x4, x5]);
> B:=linalg[matrix] (5,1,[0,1,0,0,0]);
> M:=evalm(-dl&*X-B);
> SPL:={M[1,1], M[2,1], M[3,1], M[4,1], M[5,1]};
> solve(SPL);
```

Ambil sebagai e5=[1,0,0,0,1]

```
> T:=transpose(linalg[matrix] (5,5, [-2,9,-3,1,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,-1,0,0,0,-1]));
> det(T);
> inverse(T);
> J12:=simplify(evalm(inverse(T)&*dl&*T));
> J2:=linalg[matrix] (4,4, [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0]);
> Id2:=linalg[matrix] (4,4, [1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]);
> evalm(0*J2-Id2);
> inverse(evalm(0*J2-Id2));
> M:=linalg[matrix] (5,5, [95,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,-1]);
> P:=simplify(evalm(M&*inverse(T)&*inverse(h)));
> simplify(evalm(P&*E&*T));
> simplify(evalm(P&*A&*T));
> B:=linalg[matrix] (5,2, [1,4,1,4,3,1,0,1,1,1]);
> simplify(evalm(P&*B));
```

Dalam hal ini n1=1 dan n2=4

```
> B1:=linalg[matrix] (1,2, [-1,-27]);
```

Ini berarti S1=B1. Rang(s1)=1

```
> B2:=linalg[matrix] (4,2, [1,-1,0,1,0,0,-1,-1]);
> E2:=linalg[matrix] (4,4, [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0]);
> evalm(E2&*E2);
```

```
> evalm(E2&*B2);
> S2:=linalg[matrix] (4,4, [1,-1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,-1,-1,0,0]);
```

Karena rang(S_1)=1, maka sistem terkontrol-R.

Karena rang(S_2)=3, maka sistem tak terkontrol lengkap.

7. Kesimpulan

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini dapat digambarkan sebagai berikut. Kriteria keterkontrolan sistem deskriptor kontinu bebas waktu yang efektif digunakan adalah kriteria rang matriks yang tertera pada teorema terakhir dari pembahasan dan ternyata kriteria ini berbeda dengan kriteria keterkontrolan sistem ruang keadaan. Selanjutnya jika sistem deskriptor kontinu terkontrol lengkap maka ia juga akan terkontrol-R.

DAFTAR PUSTAKA

Cobb, Daniel, *Controllability, Observability and Duality in Singular System*, IEEE. Trans. Au. Cont. Vol. AC-29. Hal. 1076-1082,1984.

Kalman, R.E., *On the General Theory of Control System*, Proc. First International Congres Automatic Control, Butterworth,London, hal. 481-493,1960.

Gopal, M., *Modern Control System*, John Wiley & Son, Singapore,1987.

Gantmacker, F.R., *The Theory of Matrices*, vol.2, Chelsea Publishing Company, New York,1964.

Sincovec, R.F, Erisman A.M., Yip E.L.,Epton M.A., *Analysis of Deskriptor System Using Numerical Algoritm*, IEEE Transaction on Automatic Control, hal 139-147, 1981.

Lewis, F.L., *Fundamental, Reachability and observability Matrices for Discrete Descriptor Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-30, hal 502-505, 1985.

Muhafzan, *Solusi Sistem Deskriptor Kontinu*, Makalah Seminar Jurusan Matematika UNAND, 1999.