ARTIKEL PENELITIAN
DANA SPP/DPP UNAND 2003
KONTRAK NO:11/LP-UA/SPP-DPP/K/V/2003

PENYELIDIKAN NOWHERE-ZERO 5-FLOW PADA KELAS GRAF KUBIK C-PLANAR

Oleh:

Lyra Yulianti, S.Si	Ketua
Asmanedi	Anggota
Drs. Syafrizal Sy, M.Si	Pembimbing

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Departemen Pendidikan Nasional
Lembaga Penelitian Universitas Andalas
Padang 2003

PENYELIDIKAN *NOWHERE-ZERO 5-FLOW* PADA KELAS GRAF KUBIK C-PLANAR

Identification Of Nowhere-Zero 5-Flow In C-Planar Cubic Graph Class

Abstract

There is a famous conjecture in graph theory called nowhere-zero 5-flow. This conjecture says that every bridgeless graph has a nowhere-zero 5-flow. The main topics of this paper is to show that a c-planar cubic graph class has a nowhere-zero 5-flow

PENDAHULUAN

Teori graf sangat berperan dalam perkembangan ilmu yang bersifat aplikasi seperti pada bidang teknik elektro, teknik transportasi, teknik pertambangan dan ilmu-ilmu lain. Pada perkembangan ilmu teori graf, terdapat *conjecture* yang sampai saat ini masih diusahakan penyelesaiannya. *Conjecture* yang menyatakan bahwa *setiap graf yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow* dikemukakan oleh W.T. Tutte dan dinamakan *Nowhere-Zero 5-Flow Conjecture* atau hanya disebut *5-Flow Conjecture*. Tulisan ini berangkat dari *conjecture* tersebut.

Pada tahun 1976, Jaeger menunjukkan bahwa jika angka 5 diganti dengan angka 8 maka *conjecture* tersebut terbukti. Pada tahun 1981, P.D. Seymour telah membuktikan bahwa *setiap graf yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 6-flow*. Sedangkan *nowhere-zero 5-flow conjecture* masih terbuka untuk ditunjukkan.

Untuk menunjukkan kebenaran *nowhere-zero 5-flow conjecture*, terdapat kesulitan karena premis *conjecture* tersebut terbatas untuk graf yang tidak memuat jembatan. Untuk menyelesaikannya, permasalahan dibatasi pada graf kubik. Pembatasan ini tidak mengurangi keumuman karena *nowhere-zero 5-flow* untuk suatu graf G dijamin keberadaannya jika ada *nowhere-zero 5-flow* untuk graf G^* yang diperoleh dari graf G, yaitu dengan cara mengganti setiap titik yang berderajat lebih dari 3 dengan sebuah *cycle* dan dengan mengkontraksi setiap sisi yang bertetangga dengan titik yang berderajat 2.

Permasalahannya adalah sebagai berikut:

- Premis *conjecture* sangat terbatas

- Penyelidikan juga harus berlaku untuk graf tidak sederhana *(pseudograph)* khususnya kelas graf sederhana.

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

Tujuan penelitian ini adalah menyelidiki *nowhere-zero 5-flow* pada graf yang tak memuat jembatan. Penyelidikan difokuskan pada graf kubik yang berupa kelas graf kubik c-planar, yaitu dengan menunjukkan bahwa:

a) Graf kubik Hamilton mempunyai *nowhere-zero 4-flow*
b) Graf kubik *single s-planar* mempunyai *nowhere-zero* 5-flow
c) Graf kubik *single c-planar* mempunyai *nowhere-zero 5-flow*
d) Graf kubik *multiple c-planar* mempunyai *nowhere-zero 5-flow.*

Penelitian ini sangat bermanfaat untuk masalah keseimbangan pada tehnik elektro, misalnya masalah arus listrik yaitu yang memenuhi Hukum Kircholf.

TINJAUAN PUSTAKA

Misalkan G suatu graf tak berarah. Pada setiap sisi G diberikan arah dengan cara memberi panah, sehingga simpul-simpul yang terkait dengan sisi e dapat dibedakan, yaitu *tail* $t(e)$ dari e dan *head* $h(e)$ dari e.

Gambar 1
Head* dan *Tail* Sisi Berarah *E

Jika $v \in V(G)$ dan $e \in E(G)$, maka definisikan:

$$\eta(e,v) = \begin{cases} 1 & , \; jika\ v = h(e) \\ 0 & , \; jika\ v\ tidak\ terkait\ dengan\ e \\ -1 & , \; jika\ v = t(e) \end{cases}$$

Suatu *Z-flow* pada G adalah pemetaan $f : E(G) \to Z$ sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku:

$$\sum_{e \in E(G)} \eta(e,v) f(e) = 0 .$$

Pemetaan f dikatakan *nowhere-zero Z-flow* jika $f(e) \neq 0$ untuk setiap $e \in E(G)$. Untuk $k \geq 2$, definisikan *k-flow* sebagai $f : E(G) \rightarrow Z_k$ sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku:

$$\sum_{e \in E(G)} \eta(e,v) f(e) = 0 \bmod k$$

Perhatikan bahwa pada kasus *k-flow*, sesuai modularitasnya, jumlah nilai *flow* masuk tidak harus tepat sama dengan jumlah nilai *flow* keluar di suatu titik, seperti pada kasus *Z-flow*.

Lemma berikut menyatakan proses pembatasan masalah dari suatu graf tidak sederhana menjadi graf sederhana.

Lemma 3.1

Misalkan G^* adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan cara menghilangkan semua loopnya. Graf G mempunyai nowhere-zero k-flow jika dan hanya jika graf G^* mempunyai nowhere-zero k-flow.

Lemma 3.2

Jika graf G mempunyai nowhere-zero k-flow, maka G tidak memuat jembatan.

Lemma 3.3

Jika graf G mempunyai nowhere-zero k-flow untuk suatu arah dari G, maka G tersebut mempunyai nowhere-zero k-flow untuk sembarang arah dari G.

Lemma 3.4

Untuk setiap $k \geq 2$, pernyataan berikut ekivalen:

i) G mempunyai nowhere-zero k-flow

ii) G mempunyai nowhere-zero Z-flow dengan semua nilai flow terletak pada selang $[1-k, k-1]$.

Dengan membalik arah semua sisi yang nilai *flow*-nya negatif, maka G mempunyai *nowhere-zero k-flow* dengan nilai *flow*-nya terletak pada selang $[1,k-1]$.

Lemma 3.5

Jika graf G mempunyai nowhere-zero k-flow, maka G mempunyai nowhere-zero s-flow untuk sebarang $s \geq k$ dengan $s \in N$.

Lemma 3.6

Setiap graf yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 6-flow.

Lemma 3.5 dan Lemma 3.6 mengakibatkan setiap graf yang tidak memuat jembatan mempunyai *nowhere-zero k-flow* untuk setiap $k \geq 6$.

Sebelum membahas *nowhere-zero 5-flow*, perhatikan *nowhere-zero k-flow* untuk $k = 2, 3$, dan 4. Pada kasus ini, kelas graf yang mempunyai *k-flow* tersebut terbatasi. Dari Lemma 3.2, graf G tidak memuat jembatan. Perhatikan lemma berikut:

Lemma 3.7

Graf G mempunyai nowhere-zero 2-flow jika dan hanya jika G adalah graf Euler.

Misalkan graf kubik G mempunyai *nowhere-zero 3-flow*. Karena $2 \equiv -1 \mod 3$ dan $-2 \equiv 1 \mod 3$ serta dengan membalik arah *flow* yang bernilai negatif maka G mempunyai *nowhere-zero 3-flow* dengan nilai *flow* 1.

Lemma 3.8

Graf kubik G mempunyai nowhere-zero 3-flow jika dan hanya jika G adalah graf bipartit.

Misalkan graf kubik G^* diperoleh dari graf G dengan cara mengganti setiap titik yang berderajat lebih besar dari 3 dengan sebuah *cycle* dan mengkontraksi sisi-sisi yang terkait dengan titik yang berderajat 2. Untuk menyelidiki keberadaan *nowhere zero k-flow* pada graf G, cukup diselidiki keberadaan *nowhere zero k-flow* pada graf kubik G^*, sesuai dengan Lemma 3.1.

Lemma 3.9

Graf kubik G yang tak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 4-flow jika dan hanya jika G adalah 3-edge colourable graph.

Karena graf Petersen tidak bipartit dan tidak *3-edge colourable*, Lemma 3.9 menunjukkan keadaan untuk $k = 2$, 3 dan 4 yang berbeda untuk $k = 6, 7, 8$ dan seterusnya. Kasus untuk $k = 5$ adalah *conjecture* yang akan dibahas.

***Conjecture* 3.1 (*5-flow Conjecture*)**

Setiap graf yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow.

Misalkan graf G mempunyai *nowhere-zero 5-flow*. Karena $3 \equiv -2 \mod 5$ dan $4 \equiv -1 \mod 5$, serta dengan membalik arah semua *flow* yang bernilai 3 dan 4 maka diperoleh G yang mempunyai *nowhere-zero 5-flow* dengan nilai *flow*-nya 1 dan 2.

Lemma 3.10

Jika graf kubik G mempunyai nowhere-zero 5-flow f_1 dengan nilai-nilai flow 1 dan 2, maka G mempunyai nowhere-zero 5-flow f_2 dengan:

i) $f_2(e) = 2$ jika $f_1(e) = 1$

ii) $f_2(e) = 1$ jika $f_1(e) = 2$.

Jika graf kubik G mempunyai *nowhere-zero 5-flow* f_1 dengan nilai-nilai *flow*nya *1* dan *2* maka perkalian semua nilai *flow* dengan *3* mengubah semua *flow* bernilai *1* menjadi $3 \equiv -2 \bmod 5$ dan mengubah semua *flow* bernilai *2* menjadi $6 \equiv 1 \bmod 5$. Dengan membalik arah *flow* yang bernilai *3* diperoleh *flow* bernilai *2*. Akibatnya diperoleh f_2 pada kesimpulan Lemma 3.10.

Perkalian semua nilai *flow* dengan *4* mengubah semua *flow* bernilai *1* menjadi $4 \equiv -1 \bmod 5$ dan mengubah semua nilai *flow* *2* menjadi $8 \equiv 3 \bmod 5$. Sedangkan, $8 \equiv 3 \bmod 5$ setara dengan $3 \equiv -2 \bmod 5$. Dengan membalik semua arah *flow* diperoleh f_1 pada graf *G*. Jadi *flow* dapat diubah sehingga diperoleh semua nilai flow hanya *1* atau *2* untuk sembarang arah yang diinginkan.

Jika *G* mempunyai *nowhere-zero 5-flow* dengan setiap *flow*-nya bernilai *1* atau *2* maka hanya ada *4* kemungkinan pola *flow* untuk *nowhere-zero 5-flow*.

Lemma 3.11

Jika G mempunyai nowhere-zero 5-flow f_1, maka untuk suatu titik tertentu v, terdapat suatu nowhere-zero 5-flow f_2 sedemikian sehingga v mendapatkan sembarang pola flow yang diinginkan.

Lemma 3.12

Setiap graf kubik planar yang tak memuat jembatan adalah 3-edge colourable.

METODE PENELITIAN

Tahapan yang dilakukan adalah:

a. Pembahasan konsep dasar teori graf berupa definisi dan notasi, keterhubungan, pewarnaan graf, serta beberapa operasi pada graf

b. Pengertian dan definisi *k-flow* dan *Nowhere-Zero 5-Flow Conjecture* dengan beberapa lemma yang menyangkut *nowhere-zero k-flow* tersebut

c. Pembuktian bahwa kelas graf kubik c-planar yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow.

d. Kesimpulan dan *open problem* jika ada untuk penelitian lanjutan.

PENYELIDIKAN *NOWHERE-ZERO 5-FLOW* PADA KELAS GRAF KUBIK C-PLANAR

Jika G adalah graf kubik yang tidak memuat jembatan, maka ada dua kemungkinan indeks kromatik G yaitu *3* atau *4*. Suatu graf kubik G yang tak memuat jembatan bisa planar atau bisa non planar. Jika graf G planar, maka G adalah *3-edge colourable graph*. Jika graf G adalah *3-edge colourable graph* maka G mempunyai *nowhere-zero 4-flow*, akibatnya graf G juga mempunyai *nowhere-zero 5-flow*.

Jika G graf non-planar maka kemungkinan dari G adalah *3-edge colourable graph* atau *snark*. Jika G sebuah *3-edge colourable graph* maka G mempunyai *nowhere-zero 4-flow*, akibatnya G juga mempunyai *nowhere-zero 5-flow*. Jika graf non -planar G mempunyai *nowhere-zero 4-flow* maka G sebuah *3-edge colourable graph*, akibatnya G juga *4-edge colourable graph*. Jika G suatu *4-edge colourable graph* maka G belum tentu mempunyai $\chi(G) = 4$, akibatnya G belum tentu sebuah *snark*. Graf kubik c-planar merupakan sebuah *snark*.

Permasalahan yang menarik adalah bahwa graf non planar, yang berupa kelas graf kubik c-planar, yang tidak memuat jembatan dengan indeks kromatik 4, mempunyai *nowhere-zero 5-flow*.

Graf Kubik Hamilton

G dikatakan suatu graf Hamilton jika terdapat *cycle* C di G sehingga *cycle* C tersebut melalui setiap titik di G. Graf kubik Hamilton merupakan salah satu bentuk dari graf yang tidak memuat jembatan.

Definisi 5.1.1

Suatu graf G disebut cycle dominated graph jika G mempunyai cycle C sehingga $G\backslash VC$ acyclic.

Definisi 5.1.2

Cycle C pada graf G dikatakan suatu dominating cycle dari G jika $G\backslash VC$ adalah suatu himpunan titik-titik yang independen.

Suatu Hamilton *cycle* C dari suatu graf Hamilton G adalah sebuah *dominating cycle*. Jika sebuah graf G mempunyai *dominating cycle* maka G adalah *cycle dominated graph*.

Conjecture 5.1.1

Setiap snark mempunyai dominating cycle.

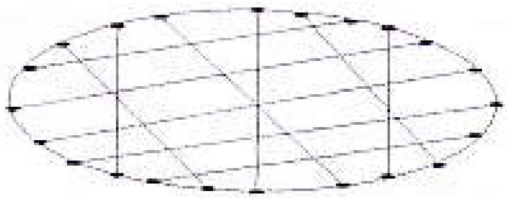
Misalkan C adalah *cycle* dari graf kubik G yang tidak memuat jembatan dan $G \backslash C$ *acyclic*. Jika v_1 dan v_2 adalah titik-titik dari C dan v_1v_2 bukan sisi dari C, maka sisi v_1v_2 disebut *chord*. Himpunan dari semua chord di G ditulis $R\langle G\rangle$.

Lema 5.1.1

Setiap graf kubik Hamilton mempunyai nowhere-zero Z-flow dengan nilai flow 1 atau 3 yang searah jarum jam atau 1 berlawanan arah jarum jam pada setiap sisi dari Hamilton cycle dan nilai flow 2 pada setiap chord.

Bukti:

Karena setiap *chord* menghubungkan 2 titik Hamilton *cycle*, maka banyaknya titik-titik dari graf kubik Hamilton adalah genap. Warnai sisi-sisi dari Hamilton *cycle* dengan dua warna yaitu warna x dan warna y secara bergantian. Warnai sisi-sisi sisanya dengan warna z. Kirim *flow* bernilai *1* pada *xy-cycle* searah jarum jam dan *flow* bernilai *2* pada *yz-cycle* dalam sembarang arah. Maka nilai *flow* pada sisi yang diwarnai x adalah *1* searah jarum jam, nilai *flow* pada sisi yang diwarnai y adalah *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam, dan nilai *flow* pada sisi yang diwarnai z adalah *2*.



Gambar 5.1
Graf Kubik Hamilton

Setelah dilakukan proses pewarnaan seperti pada pembuktian Lemma 5.1.1, jika *flow* bernilai *1* dikirim pada *xy-cycle* berlawanan arah jarum jam dan *flow* bernilai *2* pada *yz-cycle* dalam sembarang arah maka diperoleh nilai *flow* pada sisi yang diwarnai x adalah *1* berlawanan arah jarum jam, nilai flow pada sisi yang diwarnai y adalah *3* berlawanan arah jarum jam atau 1 searah jarum jam, dan nilai *flow* pada sisi yang diwarnai z adalah *2*.

***Nowhere-Zero 5-Flow* Untuk Suatu Graf C-Planar**

Definisi 5.2.1

Misalkan G adalah cycle dominated graph. G dikatakan graf c-planar jika $G \backslash R(G)$ adalah planar.

Misalkan G adalah graf c-planar. Jika $|G\backslash VC| = 1$ maka G disebut *graf kubik single s-planar*. Gambar 5.2 adalah contoh graf kubik *single s-planar*. Jika $|G\backslash VC| = n$ dengan $n \in N$, $n > 1$ maka G disebut *graf kubik multiple s-planar*.Gambar 5.3 adalah contoh graf kubik *multiple s-planar*. Selanjutnya, jika $G\backslash VC$ adalah sebuah *tree* maka G disebut *graf kubik single c-planar*. Gambar 5.4 adalah contoh graf kubik *single c-planar*. Jika $G\backslash VC$ adalah suatu *forest* yang terdiri dari dua atau lebih *tree* maka G disebut *graf kubik multiple c-planar*.

Teorema 5.2.1

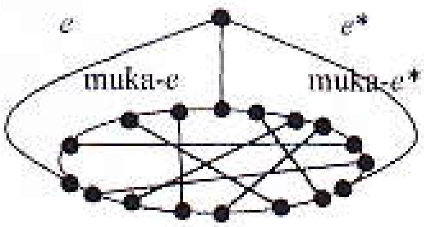
Graf kubik single s-planar yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow.

Bukti:

Tanpa mengurangi keumuman, perhatikan Gambar 5.2. Pertama-tama hapus sisi e^*. Dengan proses kontraksi diperoleh graf kubik Hamilton. Banyaknya titik-titik dari graf kubik Hamilton adalah genap. Terapkan proses kontruksi Lemma 5.1.1. Warnai sisi-sisi dari Hamilton *cycle* dengan dua warna yaitu warna x dan warna y secara bergantian. Warnai sisi sisanya dengan warna z. Kirim *flow* bernilai 1 pada xy-cycle searah jarum jam dan *flow* bernilai *2* pada yz-cycle dalam sebarang arah. Nilai flow pada sisi yang diwarnai x adalah *1* searah jarum jam, nilai *flow* pada sisi yang diwarnai y adalah *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam dan nilai *flow* pada sisi yang diwarnai z adalah *2*. Selanjutnya sisi e^* dikembalikan ke graf semula. Ada dua kemungkinan arah sisi e (berwarna z), yaitu:

- Jika arah sisi e searah jarum jam maka kirim *flow* bernilai *2* searah jarum jam yang mengitari muka-e dan muka-e^*
- Jika arah sisi e berlawanan arah jarum jam maka kirim *flow* bernilai *2* pada muka-e^* searah jarum jam.

Akhirnya diperoleh *nowhere zero 5-flow*. ■



Gambar 5.2
Graf Kubik Single S-Planar Yang Tidak Memuat Jembatan

Teorema 5.2.2

Graf kubik multiple s-planar yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow.

Bukti:

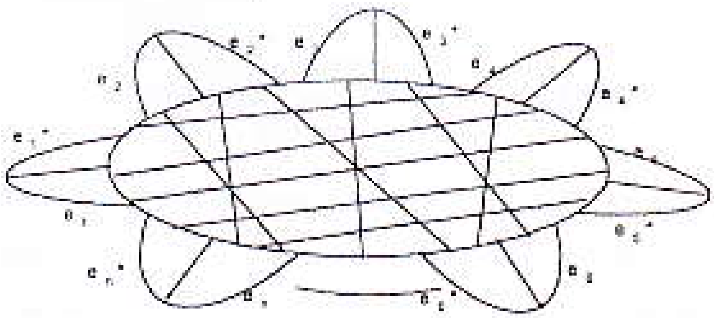
Misalkan G graf kubik *multiple s-planar* yang tidak memuat jembatan. Tanpa mengurangi keumuman, perhatikan Gambar 5.3. Lakukan proses konstruksi seperti pada pembuktian Teorema 5.2.1 sebanyak n kali jika $|G\backslash C| = n$ dengan C adalah *dominating cycle* dari graf G.

Hapus sisi-sisi e_i* pada setiap i ($i=1,2,...,n$). Dengan proses kontraksi diperoleh graf kubik Hamilton. Banyaknya titik-titik dari graf kubik Hamilton adalah genap. Warnai sisi-sisi dari Hamilton *cycle* dengan dua warna yaitu warna x dan warna y secara bergantian. Warnai sisi sisanya dengan warna z. Kirim *flow* bernilai *1* pada *xy-cycle* dalam arah jarum jam dan *flow* bernilai *2* pada *yz-cycle* dalam sebarang arah. Jelas nilai flow pada sisi yang diwarnai x adalah *1* searah jarum jam, nilai *flow* pada sisi yang diwarnai y adalah *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam, dan nilai *flow* pada sisi yang diwarnai z adalah *2*. Selanjutnya sisi-sisi e_i* ($i=1,2,...,n$) pada Gambar 5.3 dikembalikan ke graf semula. Arah sisi e sangat menentukan pola pengiriman *flow* pada muka.

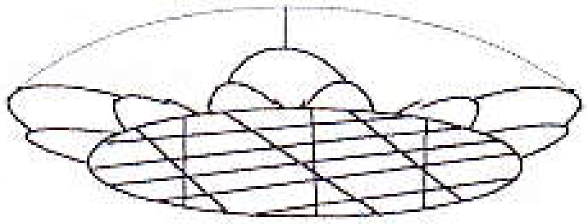
Ada dua kemungkinan arah sisi-sisi e_i untuk suatu i ($i=1,2,...,n$).

- Jika arah sisi e_i untuk suatu i ($i=1,2,...,n$) searah dengan arah jarum jam maka kirim *flow* bernilai *2* searah jarum jam yang mengitari muka-e_i dan muka-e_i*
- Jika arah sisi e_i untuk suatu i ($i=1,2,...,n$) berlawanan arah jarum jam maka kirim *flow* bernilai *2* yang mengitari muka-e_i* searah jarum jam.

Akhirnya diperoleh *nowhere zero 5-flow*. ■



Gambar 5.3
Graf Kubik Multiple S-Planar
Yang Tidak Memuat Jembatan



Gambar 5.4
Graf Kubik Single C-Planar Yang
Tidak Memuat Jembatan

Untuk selanjutnya, sisi yang dimuat pada irisan muka-*a* dan muka-*b* disebut *sisi ab*.

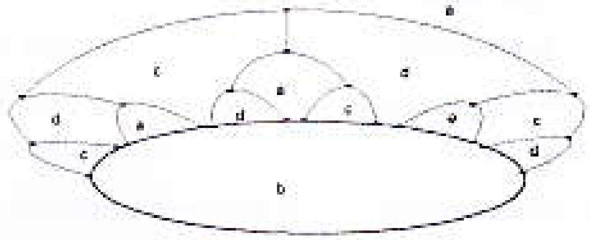
Teorema 5.2.3

Setiap graf kubik single c-planar yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow.

Bukti:

Misalkan *G* graf kubik *single c-planar* yang tidak memuat jembatan dan *C cycle* di *G* sedemikian *sehingga G\VC adalah sebuah tree. Langkah-langkah pembuktian:*

1) Hapus semua *chord* pada *cycle C*. Kontraksikan setiap sisi yang terkait dengan titik berderajat dua sehingga diperoleh graf kubik planar yang tidak memuat jembatan. Sebut graf kubik single planar *H*. Lihat Gambar 5.4a.



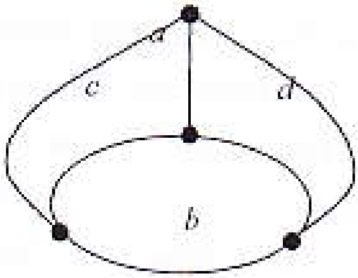
Gambar 5.4a
Graf Kubik Single Planar *H* Yang Tidak
Memuat Jembatan

2) Warnai semua muka graf *H* dengan warna *a,b,c* dan *d*. Sebut sebagai *muka-a, muka-b, muka-c* dan *muka-d*. Misalkan muka sebelah luar graf diberi warna *a* dan muka yang terbentuk oleh cycle *C* diberi warna *b*. Muka-muka yang lain diberi warna *a, c* atau *d*, dimana masing-masing muka mempunyai sisi bersama dengan muka-*b*

3) Hapus semua *sisi ac* sehingga diperoleh graf yang terdiri dari muka-b dan sisi-sisi yang mengitari muka-d. Muka-d bertetangga dengan muka-b dengan satu sisi di H. Kemudian kontraksi setiap sisi yang terkait dengan setiap titik yang berderajat dua, sehingga semua *path* yang mengitari muka-d menjadi *chord-chord* dari *cycle* C
4) Kembalikan semua *chord* dari *cycle* C. Terapkan konstruksi Lemma 5.1.1, sehingga *chord-chord* di G mempunyai *flow* bernilai *2* dan masing-masing sisi pada *cycle* C mempunyai *flow* bernilai *1* atau *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam. Jadi *flow* dari sisi-sisi yang mengitari muka-d bernilai *2* searah jarum jam atau berlawanan arah jarum jam
5) Jika arah *flow* yang mengitari muka-d searah jarum jam maka kirim *flow* bernilai *2* pada arah yang sama, sehingga masing-masing sisi pada *cycle* C yang beririsan dengan muka-d mempunyai *flow* bernilai *1* atau *3* berlawanan arah jarum jam atau *1* searah jarum jam. Nilai *flow* pada masing-masing sisi yang mengitari muka-d menjadi *2* berlawanan arah jarum jam atau *4* searah jarum jam. Jadi semua *chord* pada *cycle* C mempunyai *flow* bernilai *2* dan sisi-sisi yang lainnya bernilai *1* atau *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam.
6) Kembalikan semua *sisi ac* dari graf G semula yang mempunyai *flow* bernilai nol
7) Kirim *flow* bernilai *2* melalui *cycle-cycle* yang mengitari muka-c searah jarum jam.

Akhirnya diperoleh *nowhere-zero 5-flow* untuk G. ■

Misalkan G graf kubik planar, jadi G dapat digambar pada bidang sehingga tidak ada dua sisi yang bersilangan. Muka-muka di G dapat diwarnai sehingga tidak ada setiap dua muka yang bertetangga mempunyai warna yang sama, lihat Gambar 5.5. Semua muka di G diberi warna, muka yang sebelah luar disebut sebagai *muka luar* dari G tersebut. Jika struktur muka-muka di G diubah sehingga warna muka-muka pada G berubah maka muka luar dari G berubah. Jadi muka luar dari suatu graf bergantung kepada struktur muka-muka di graf tersebut setelah pewarnaan.



Gambar 5.5
Muka-a Sebagai Muka Luar Dari Graf G

Teorema 5.2.4

Setiap graf kubik multiple c-planar yang tidak memuat jembatan mempunyai nowhere-zero 5-flow.

Bukti:

Misalkan G adalah *multiple c-planar graph*. Maka $G\backslash VC$ adalah *forest*.

Jika *semua tree dimuat dalam muka luar* maka lakukan proses pembuktian Teorema 5.2.3 pada setiap tree untuk mendapatkan *nowhere-zero 5-flow*.

Jika *tidak semua tree dimuat dalam muka luar* maka untuk pembuktiannya lakukan proses langkah-langkah berikut:

1) Hapus semua *chord* pada *cycle* C di G dan kontraksi setiap sisi yang terkait dengan titik berderajat dua sehingga diperoleh graf kubik planar yang tidak memuat jembatan. Sebut graf kubik *multiple planar* K
2) Lakukan proses pewarnaan seperti pada langkah 2) di Teorema 5.2.3 untuk graf $G\backslash R(G)$, lihat Gambar 5.5
3) Lakukan proses penghapusan beberapa sisi pada *tree* yang dimuat dalam suatu muka dengan mempertimbangkan hal-hal sebagai berikut:
   a) Jika tree ini dimuat dalam muka-a maka hapus semua *sisi ac*
   b) Jika tree ini dimuat dalam muka-c maka hapus semua *sisi cd*
   c) Jika tree ini dimuat dalam muka-d maka hapus semua *sisi ad*

   Akhirnya bagian yang tersisa dari *forest* dapat dipandang sebagai *chord-chord* dari *cycle* C.
4) Kembalikan semua *chord* yang dihapus pada langkah 1) dan kontraksi semua sisi yang terkait dengan titik berderajat 2
5) Terapkan konstruksi dari Lemma 5.1.1, sehingga setiap *chord* dari *cycle* C mempunyai *flow* bernilai *2* dan setiap sisi pada *cycle* C mempunyai *flow* bernilai *1* atau *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam. G mempunyai *nowhere-zero 4-flow* untuk graf $G\backslash${sisi-sisi yang terhapus oleh langkah 3)}
6) Kembalikan semua sisi yang terhapus dari graf G pada langkah 3)
7) Perhatikan suatu *tree* yang dimuat dalam muka-a. Jika *tree* ini dimuat dalam muka-a maka ikuti prosedur langkah 5 dan 7 dari Teorema 5.2.3 di atas untuk membuat semua nilai *flow* pada *tree* yang dimuat dalam muka-a ini menjadi tidak nol

8) Perhatikan suatu *tree* yang dimuat dalam muka-c. Setiap sisi cb mempunyai *flow* bernilai *1* atau *3* berlawanan arah jarum jam atau *1* searah jarum jam. Pada *tree* ini, jika *flow* bernilai *2* pada muka-a berlawanan arah jarum jam maka kirim *flow* bernilai *2* mengitari muka-a pada arah yang sama. Kemudian, kirim *flow* bernilai 2 melalui *cycle-cycle* yang mengitari muka-d berlawanan arah jarum jam. Akibatnya semua nilai flow pada tree ini menjadi tidak nol

9) Perhatikan suatu *tree* yang dimuat dalam muka-d. Ada dua kemungkinan nilai *flow*:

   a) Untuk kasus setiap sisi db dengan *flow* bernilai *1* atau *3* berlawanan arah jarum jam atau *1* searah jarum jam.

      Perhatikan *tree* yang dimuat muka-d ini, jika *flow* bernilai *2* pada muka-c berlawanan arah jarum jam maka kirim *flow* bernilai **2** mengitari muka-c pada arah yang sama. Kemudian kirim flow bernilai 2 melalui *cycle-cycle* yang mengitari muka-a berlawanan arah jarum jam. Akibatnya semua nilai *flow* pada tree ini menjadi tidak nol

   b) Untuk kasus setiap sisi db dengan *flow* bernilai *1* atau *3* searah jarum jam atau *1* berlawanan arah jarum jam.

      Pada *tree* ini, jika *flow* bernilai *2* pada muka-csearah jarum jam, maka kirim *flow* bernilai *2* mengitari muka-c pada arah yang sama. Kemudian, kirim *flow* bernilai *2* melalui *cycle-cycle* yang mengitari muka-a searah jarum jam.

      Akibatnya semua nilai *flow* pada *tree* ini menjadi tidak nol

Akhirnya diperoleh *nowhere-zero 5-flow* untuk G. ■

KESIMPULAN

Masalah *nowhere-zero 5-flow* dapat diselesaikan dengan membatasi pembahasan dalam graf kubik. Pembatasan ini tidak mengurangi keumumannya karena *nowhere-zero 5-flow* untuk suatu graf G dijamin keberadaannya jika ada *nowhere-zero 5-flow* untuk suatu graf kubik G^* yang diperoleh dari graf G dengan cara mengganti setiap titik yang berderajat lebih dari *3* dengan sebuah *cycle* dan dengan mengkontraksi setiap sisi yang bertetangga dengan titik yang berderajat *2*.

Graf kubik s-planar merupakan subgraf dari graf kubik c-planar.Graf kubik c-planar adalah *cycle dominated graph* dan graf kubik s-planar mempunyai *dominating cycle*. Jika graf G mempunyai *dominating cycle* maka G adalah *cycle dominated graph*.

Graf kubik *single s-planar*, *multiple s-planar*, *single c-planar* dan *multiple c-planar* adalah contoh kelas graf kubik c-planar. Graf Petersen adalah contoh graf kubik s-planar yang tidak memuat jembatan dengan 10 titik. Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa kelas graf kubik c-planar mempunyai *nowhere-zero 5-flow*.

DAFTAR PUSTAKA

N. Hartsfield, G. Ringel, "*Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction, Revised and Augmented*", Academic Press, New York, 1994

J.A. Holton, J. Sheehan, "*The Petersen Graph*", Cambridge University Press, Cambridge, 1993

S. Uttunggadewa, "*A Conjecture Equivalent to the Nowhere-Zero 5-Flow Conjecture*", Memorandum no.1415, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, The Netherlands, 1996

S. Uttunggadewa, "*Indonesian Graphs: An Investigation of the Nowhere-Zero Five-Flow Conjecture and the Cycle Double Cover Conjecture*", Dissertation, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, The Netherlands, 2000

C. Zhang, "*Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*", Marcel Dekker Inc, New York, 1997