Konstruksi Ruang Sasaran Sistem Deskriptor Kontinu

Muhafzan, Ranti Fauzia, dan Alwis Abbas
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

ABSTRAK

Artikel ini mengkonstruksi ruang sasaran sistem deskriptor kontinu yang berbentuk sebagai berikut :

$$E\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad 0 \le t \le b$$
$$x(0) = x_0$$

dengan A, B adalah matriks riel, sedangkan E adalah matriks riel singular. Prosedur konstruksi dilakukan dengan merumuskan himpunan keadaan awal dan selanjutnya merumuskan himpunan keadaan yang ingin dicapai

1. PENDAHULUAN

Teori kontrol merupakan salah satu bidang matematika terapan yang dewasa ini sangat berkembang pesat. Sejak teori ini dikembangkan oleh Kalman (1960), aplikasi teori kontrol telah meluas ke berbagai bidang terutama dalam bidang industri.

Persoalan utama dalam teori kontrol adalah mencari suatu pengontrol yang dapat merubah keadaan sistem:

$$\dot{x}(t) = f\,(x(t), u(t), t) \qquad (1)$$

dari suatu keadaan awal menjadi keadaan yang ingin dicapai (Gopal,M.,1987).

Dalam persamaan (1), x(t) menyatakan keadaan, u(t) menyatakan pengontrol (input) dan t menyatakan waktu. Bentuk (1) dikenal sebagai bentuk umum dari sistem kontrol.

Sistem deskriptor kontinu merupakan hal khusus dari persamaan (1) yang berbentuk sistem kontrol linier. Representasi keadaannya adalah sebagai berikut:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 \le t \le b \qquad (2)$$
$$x(0) = x_0$$

Pada persamaan (2), matriks E tidak harus non-singular, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, A dan B masing – masing adalah matriks riil dengan ukuran yang sesuai (Sincovec, *et al*, 1981).

Sebelum mencari pengontrol yang sesuai untuk sistem deskriptor (2) terlebih dahulu harus diidentifikasikan semua keadaan awal dan semua keadaan yang ingin dicapai. Himpunan semua keadaan yang dapat dicapai dari suatu keadaan awal untuk suatu sistem deskriptor disebut **ruang sasaran** untuk sistem deskriptor tersebut. Tidak semua keadaan dapat dicapai dari suatu keadaan awal. Sebagai contoh:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Jika **u(t) = -4 + t**, maka untuk $t_1 = 2$, keadaan $\hat{x}_1 = \left[2e^2, 2, 0\right]^T$ dapat dicapai dari keadaan awal $x_0 = [2, 4, 0]^T$. Sedang keadaan $\hat{x}_1 = [-2, 2, 0]^T$ tidak dapat dicapai dari keadaan awal $x_0 = [2, 4, 0]^T$, karena $\hat{x}_1(t) = 2e^t \neq -2$ untuk semua $t \geq 0$.

Contoh ini memperlihatkan perlunya mengidentifikasi dan menghimpun semua keadaan yang dapat dicapai dalam suatu rumusan ruang sasaran.

Dengan demikian, yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah mengidentifikasikan dan menghimpun semua keadaan yang dapat dicapai dari suatu keadaan awal untuk suatu sistem deskriptor kontinu.

2. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian

Berdasarkan uraian pada bagian latar belakang, maka tujuan penelitian ini adalah mengkonstruksi ruang sasaran untuk sistem deskriptor kontinu.

Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan:

1. Bagi para pengguna matematika, khususnya yang memakai sistem deskriptor (2) sebagai suatu alat, dapat menggunakan hasil penelitian ini sebelum merancang pengontrol untuk sistem deskriptor tersebut
2. Bagi perkembangan ilmu matematika, hasil ini merupakan kontribusi penting dalam aplikasi matematika, khususnya bidang kontrol.

3. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini merupakan kelanjutan penelitian terhadap pencarian solusi sistem deskriptor kontinu (Muhafzan, 2000) dan uji keterkontrolan sistem deskriptor kontinu (Muhafzan, 2001).

Perhatikan sistem deskriptor (2). Dengan menggunakan transformasi yang sesuai, sistem deskriptor (2) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= E_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ E_2 \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2 u(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

dengan E_2 matriks nilpoten $n_1 \times n_1$, E_1 matriks $n_1 \times n_1$, B_1 matriks $n_1 \times k$, B_2 matriks $n_1 \times k$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ dan $u(t) \in \mathbb{R}^k$ (Muhafzan, 2000). Sehingga solusi sistem (3) adalah:

$$x_1(t) = e^{tE_1} x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)E_1} B_1 u(s)\, ds$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2^i B_2 u^{(i)}(t)$$

Solusi numerik sistem deskriptor (2) telah diselidiki oleh Sincovec, *et.al* (1981). Lewis (1985) telah mengemukakan ruang sasaran untuk sistem deskriptor diskrit.

Berikut ini dikemukakan beberapa istilah yang dikutip dari Lewis (1985) dalam menentukan ruang sasaran sistem deskriptor diskrit:

Definisi. Sistem deskriptor (2) dikatakan **terkontrol lengkap** jika sebarang keadaan yang diingnkan dapat dicapai dari sebarang keadaan titik *x* awal Lewis (1985).

Definisi. Misalkan x_0 adalah keadaan awal sebarang titik awal $t_0 = 0$. Keadaan x_1 dikatakan **dapat dicapai** dari keadaan x_0 jika terdapat $t_1 > 0$ dan $u \in U$ sehingga untuk solusi $x(t)$ yang berkaitan dengan u berlaku $x(0) = x_0$ dan $x(t_1) = x_1$ (Lewis (1985).

Selanjutnya definisikan notasi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ untuk suatu pasangan matriks (E, B) sebagai berikut:

$$\langle E | B \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}(E^i B)$$

dengan E adalah matriks $n \times n$ dan B matriks $n \times k$.

4. Metode Penelitian

Untuk mengkonstruksi ruang sasaran sistem deskriptor kontinu, sesuai dengan tujuan penelitian, maka dilakukan cara berikut:

a. Tentukan solusi sistem deskriptor kontinu
b. Rumuskan secara eksplisit himpunan keadaan awal untuk sistem deskriptor kontinu
c. Menganalisis keadaan dan mengidentifikasi keadaan yang ingin dicapai
d. Merumuskan keadaan yang dapat dicapai dalam suatu bentuk formula matematika
e. Membahas beberapa contoh penggunaan

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk menyelesaikan penelitian ini, terlebih dahulu sistem deskriptor (2) diselesaikan. Dengan menggunakan transformasi Laplace, persamaan (2) dapat dipisahkan menjadi dua subsistem, yakni :

$$\dot{x}_1(t) = E_1 x_1(t) + B_1 u(t)$$

$$E_2 \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t)$$

Sehingga solusi sistem deskriptor (2) adalah

$$x_1(t) = e^{tE_1} x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)E_1} B_1 u(s)\, ds$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2^i B_2 u^{(i)}(t)$$

dengan $u^{(i)}$ menyatakan turunan ke-i dari u.

Untuk sistem ruang keadaan, setiap vektor di R^n dapat berperan sebagai keadaan awal yang diperkenankan, namun tidak demikian halnya dengan sistem deskriptor. Sebagai ilustrasi, misalkan

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Jika u(t) = -4 + t, maka untuk $t_1 = 2$, keadaan $\hat{x}_1 = \left[2e^2, 2, 0\right]^T$ dapat dicapai dari keadaan awal $x_0 = [2, 4, 0]^T$. Sedang keadaan $\hat{x}_1 = [-2, 2, 0]^T$ tidak dapat dicapai dari keadaan awal $x_0 = [2, 4, 0]^T$, karena $\hat{x}_1(t) = 2e^t \neq -2$ untuk semua $t \geq 0$.

Jika diambil $u = \{u(t) \mid u(t) \in R^n$ dan u(t) terdiferensial sedikitnya m-1 kali $\}$, maka rumusan himpunan keadaan awal yang diperkenankan di $t_0 = 0$ untuk sistem deskriptor (2) adalah

$$I_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \middle| x_{01} \in R^{n_1},\ x_{02} = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2{}^i B_2 u^{(i)}(0), u \in U \right\}$$

Dengan ilustrasi yang diberikan diatas dan dengan menggunakan teknik-teknik aljabar linier dapat dibuktikan keabsahan teorema berikut ini.

Teorema.

Misalkan $I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \middle| x_{01} = 0,\ x_{02} = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2{}^i B_2 u^{(i)}(0), u \in U \right\}$.

1. Jika $x_0 \in I_0$, maka $R(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| y_1 \in \langle E_1 | B_1 \rangle, y_2 \in \langle E_2 | B_2 \rangle \right\}$, dengan

$$\langle E_1 | B_1 \rangle = \sum_{i=0}^{n_1 - 1} \operatorname{Im}(E_1{}^i B_1) \quad \text{dan} \quad \langle E_2 | B_2 \rangle = \sum_{i=0}^{n_2 - 1} \operatorname{Im}(E_2{}^i B_2)$$

2. Jika $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \in I_c$, maka

$R(\bar{x}) = R(x_0) + H(\bar{x})$ dengan $x_0 \in I_0$ dan

$$H(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| z_1 \in e^{|E_1 t} \bar{x}_1, t > 0, 0 \in R^{n_2} \right\}$$

3. Himpunan keadaan yang ingin dicapai secara lengkap adalah

$$\bigcup_{\bar{x} \in I_c} R(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| y_1 \in R^{n_1},\ y_2 \in \langle E_2 | B_2 \rangle \right\}$$

Teorema diatas merupakan rumusan ruang keadaan yang ingin dicapai dari keadaan awal yang diketahui.

6. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah bahwa ruang sasaran untuk sistem deskriptor kontinu adalah sebagai berikut :

1. Untuk keadaan awalnya berada di himpunan

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \middle| x_{01} = 0,\ x_{02} = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2{}^i B_2 u^{(i)}(0), u \in U \right\},$$

ruang sasarannya adalah

$$R(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| y_1 \in \langle E_1 | B_1 \rangle, y_2 \in \langle E_2 | B_2 \rangle \right\}$$

2. Untuk keadaan awalnya berada di himpunan

$$I_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \middle| x_{01} \in R^{n_1},\ x_{02} = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2{}^i B_2 u^{(i)}(0), u \in U \right\},$$

ruang sasarannya adalah $R(\bar{x}) = R(x_0) + H(\bar{x})$ dengan $x_0 \in I_0$ dan

$$H(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| z_1 \in e^{|E_1 t} \bar{x}_1, t > 0, 0 \in R^{n_2} \right\}$$

3. Ruang sasaran lengkap adalah

$$\bigcup_{\bar{x} \in I_c} R(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| y_1 \in R^{n_1},\ y_2 \in \langle E_2 | B_2 \rangle \right\}$$

DAFTAR PUSTAKA

Gopal, M., (1987), *Modern Control System*, John Wiley & Son, Singapore

Kalman, R. E., (1960), *On the General Theory of Control System*, Proc. First International Congres Automatic Control, Butterworth, London, hal 481-493

Lewis, F. L., (1985), *Fundamental, Reachability and Observability Matrices for Discrete Descriptor Systems*, IEEE Trans. Au. Cont., 30: 502-505

Muhafzan, (2000), *Eksistensi dan Ketunggalan Solusi Sistem Deskriptor Kontinu Bebas Waktu*, Prosiding Semirata Bidang MIPA BKS-PTN Wil. Barat

Muhafzan, (2001), *Uji Keterkontrolan Sistem Deskriptor Kontinu Bebas Waktu*, *Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, 10:42-46*

Sincovec, R. F, Erisman A.M., Yip E.L., Epton M. A., (1981), *Analysis of Descriptor System Using Numerical Algorithm*, IEEE Trans. Au. Cont.: 139-147.