

ARTIKEL PENELITIAN
DANA SPP/DPP UNAND 2002
Kontrak Nomor : 24/LP-UA/SPP-DPP/K/V/2002

**PERHITUNGAN NUMERIK UNTUK MASALAH
NILAI SINGULAR TERSTRUKTUR KOMPLEKS**

Oleh :

Budi Rudianto, MSi

Rifki Aries

Drs. M.Ishak, MSi

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS ANDALAS
UNIVERSITAS ANDALAS 2002

PERHITUNGAN NUMERIK UNTUK MASALAH NILAI SINGULAR TERSTRUKTUR KOMPLEKS

ABSTRAK

Permasalahan Robust mencakup ketidakpastian parameter riil dapat diformulasi ulang sebagai masalah μ (nilai singular terstruktur) kompleks. Struktur blok ketidakpastian disusun terdiri dari blok riil dan kompleks. Perhitungan numerik Batas atas dan bawah digunakan untuk menyelesaikan masalah μ kompleks. Pada penelitian ini akan ditentukan suatu algoritma iterasi $D-K$ untuk menghitung Batas atas dan bawah dari μ .

I. PENDAHULUAN

Dalam perancangan pengontrol dengan menggunakan kontrol modern, masalah kontrol optimal H_∞ merupakan masalah penting. Masalah kontrol optimal H_∞ adalah menentukan semua pengontrol $K(s)$ yang diperkenankan sehingga $\|T_{zw}\|_\infty$ minimal, dimana T_{zw} merupakan fungsi transfer loop tertutup dari w ke z . Pengontrol optimal H_∞ secara umum tidak tunggal untuk sistem MIMO, dan untuk memperoleh pengontrol yang meminimumkan $\|T_{zw}\|_\infty$ adalah sulit. Sehingga dalam praktek cukup dicari pengontrol yang sangat dekat dengan kriteria optimal yang diinginkan. Dengan menambahkan matriks Diagonal Penskala $D(s)$ pada T_{zw} diharapkan $\|DT_{zw}D^{-1}\|_\infty$ menjadi lebih kecil dari T_{zw} . Selanjutnya proses perhitungan tersebut dikenal sebagai sintesis μ (baca : miu).

Nilai Singular Terstruktur μ telah dikenalkan pada [1] sebagai alat untuk analisis kerobustan dari system terhadap ketakpastian kompleks terstruktur. Untuk kasus kompleks yaitu struktur blok yang memuat ketakpastian kompleks, maka masalah batas akan diselesaikan dengan menggunakan minimisasi nilai singular.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Transformasi Fraksional Linier (TFL)

Misalkan M matriks kompleks yang dipartisi sebagai :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in C^{(n_1+p) \times (n_1+q_1)} \quad \dots \dots \dots (1)$$

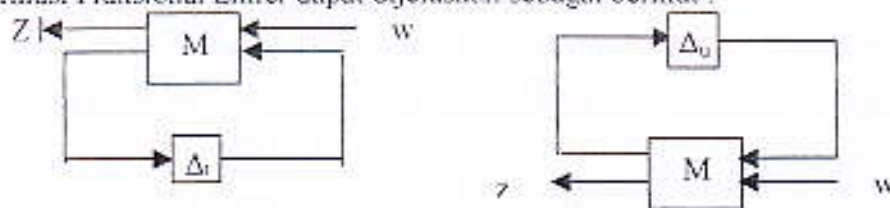
dan misalkan $C_1 \subset C^{n \times n}$ dan $C_2 \subset C^{(n+p) \times (n+p)}$, maka didefinisikan Transformasi Fraksional Linier bawah dan atas sebagai pemetaan :

$$\begin{aligned} F_l(M, \Delta) : C_2 &\mapsto C^{n \times n} \\ F_u(M, \Delta) : C_1 &\mapsto C^{(n+p) \times (n+p)} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (2)$$

dengan,

$$\begin{aligned} F_l(M, \Delta_l) &= M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21} \\ F_u(M, \Delta_u) &= M_{22} + M_{21} \Delta_u (I - M_{11} \Delta_u)^{-1} M_{12} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Jelas bahwa Transformasi Fraksional Linier diatas akan terdefinisi dengan baik, jika matriks $(I - M_{22} \Delta_l)$ dan $(I - M_{11} \Delta_u)$ mempunyai invers. Secara grafis Transformasi Fraksional Linier dapat dijelaskan sebagai berikut :



2.2. Analisis Kerobustan μ

Definisi : Misalkan himpunan model ketidakpastian \mathcal{H} . Misalkan pula P himpunan performansi obyektif yang merupakan model perancangan nominal dan pengontrol K . Maka sistem umpan balik loop tertutup dikatakan mempunyai :

- (i) Stabil Nominal (SN) : jika K stabil internal pada suatu model nominal P_{nom} .
- (ii) Stabil Robust (SR) : jika K stabil internal pada setiap model plant P di \mathcal{H} , atau ekuivalen dengan pernyataan berikut :

$$\text{stabil robust} \Leftrightarrow \|W_{st} K P_{nom} (I + P_{nom} K)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

- (iii) Performansi Nominal (PN) : jika performansi obyektif dipenuhi untuk suatu model plant nominal P_{nom} , atau ekuivalen dengan pernyataan berikut :

$$\text{performansi nominal} \Leftrightarrow \|W_p (I + P_{nom} K)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

- (iv) Performansi Robust (PR) : jika K stabil internal pada setiap model plant P di \mathcal{H} , dan performansi obyektif dipenuhi untuk setiap model plant P di \mathcal{H} , atau ekuivalen dengan pernyataan berikut

$$\text{performansi robust} \Leftrightarrow \|W_p (I + PK)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

Notasi dan Definisi

Notasi yang digunakan disini adalah notasi standart yang diambil dari [5] dan [6]. Untuk sembarang matriks kompleks bujursangkar M kita notasikan transpos konjuget kompleks dengan M^* , dan norma Frobenius dengan $\|M\|_F$. Nilai singular terbesar dan radius Spektral dinyatakan dengan $\bar{\sigma}(M)$ dan $\rho(M)$. Radius spektral riil

didefinisikan $\rho_r(M) = \max\{|\lambda|\}$, λ merupakan nilai eigen riil dari M , dengan $\rho_r(M) = 0$ jika tidak mempunyai nilai eigen riil. Untuk matriks Hermittian M , maka $\bar{\lambda}(M)$ dan $\underline{\lambda}(M)$ menyatakan nilai eigen (riil) terbesar dan terkecil. Untuk sebarang vektor kompleks x , maka x^* menyatakan transpos konjugat kompleks dan $|x|$ norma Euclidean. Selanjutnya kita notasikan matriks identitas $k \times k$ dan matriks nol dengan I_k dan 0_k .

Definisi nilai singular terstruktur μ , bergantung pada struktur blok dari ketakpastian, yang didefinisikan sebagai berikut. Misalkan diberikan matriks $M \in C^{n \times n}$ dan tiga bilangan bulat nonnegatif m_r , m_c dan m_C dengan $m := m_r + m_c + m_C \leq n$, struktur blok $K(m_r, m_c, m_C)$ merupakan m -buah bilangan bulat positif

$$K = (k_1, \dots, k_{m_r}, k_{m_r+1}, \dots, k_{m_r+m_c}, k_{m_r+m_c+1}, \dots, k_m) \dots (4)$$

dimana kita ambil $\sum_{i=1}^m k_i = n$ pada order berdimensi tiga yang bersesuaian dengan matriks M . Sementara itu, himpunan dari semua perturbasi dinyatakan sebagai :

$$X_K = \left\{ \Delta = \text{blockdiag} \begin{pmatrix} \delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \\ \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \\ \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C \end{pmatrix} : \delta_i^r \in R, \delta_i^c \in C, \Delta_j^C \in C^{k_{m_r+m_c+1} \times \dots \times k_m} \right\} \dots (5)$$

dengan catatan bahwa $X_K \subset C^{n \times n}$ dan struktur blok terdiri dari nilai skalar riil, skalar kompleks, dan blok kompleks, dimana blok kompleks tidak perlu bentuk yang bersesuaian. Akibatnya untuk kasus kompleks bersesuaian dengan $m_r = 0$, dan untuk kasus riil $m_r = m_C = 0$.

Nilai Singular terstruktur, $\mu_K(M)$, dari matriks $M \in C^{n \times n}$ terhadap struktur blok $K(m_r, m_c, m_C)$ didefinisikan sebagai :

$$\mu_K(M) = \left(\min_{\Delta \in X_K} \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - \Delta M) = 0\} \right)^{-1} \dots (6)$$

dengan $\mu_K(M) = 0$ jika tidak ada $\Delta \in X_K$ sehingga $\det(I - \Delta M) = 0$.

Untuk perhitungan numerik batas bawah dan batas atas masalah nilai singular terstruktur μ dapat didefinisikan himpunan blok diagonal matriks penskala (yang bergantung pada struktur blok), sebagai berikut :

$$C_K = \left\{ \Delta \in X_K : \delta_i \in [-1, 1], \delta_i^{c*} \delta_i^c = 1, \Delta_j^{c*} \Delta_j^c = I_{k_{m_r+m_c+1}} \right\} \dots (7)$$

$$U_K = \{U \in Q_K : U^* U = I_n\} \dots (8)$$

$$D_K = \left\{ \text{blokdiag} \left(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_C} I_{k_m} \right) : \begin{matrix} 0 < D_i = D_i^* \in C^{k_i \times k_i}, 0 < d_i \in R \end{matrix} \right\} \dots (9)$$

$$G_K = \left\{ \text{blokdiag} \left(G_1, \dots, G_{m_r}, 0_{k_{m_r+1}}, \dots, 0_{k_m} \right) : D_i = D_i^* \in C^{k_i \times k_i} \in R \right\} \dots (10)$$

$$\bar{D}_z = \left\{ \text{blokdiag}(D_1, \dots, D_{n_1+n_2}, d_1 I_{n_1}, \dots, d_{n_2} I_{n_2}) : \right. \\ \left. \det(D_i) \neq 0, D_i \in C^{k_i \times k_i}, d_i \neq 0, d_i \in C \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\bar{G}_z = \left\{ \text{blokdiag}(g_1, \dots, g_{n_1}, 0_{n_2}) : g_i \in R \right\} \dots\dots\dots (12)$$

dimana $n_1 = \sum_{i=1}^{m_1} k_i$, dan $n_2 = n - n_1$.

III. METODE PENELITIAN

Untuk menyelesaikan penelitian ini akan disusun langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan Transformasi Fraksional Linier
2. Menentukan Batas Bawah untuk μ Kompleks
3. Menentukan Batas Atas untuk μ Kompleks
4. Menentukan algoritma perhitungan numerik untuk μ Kompleks

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Transformasi Fraksional Linier Untuk Batas Atas μ

Untuk menentukan μ perlu diketahui karakteristik kerobustan dan performansi dari μ dengan menggunakan Teorema *Mem Loop*. Uji nilai selalu diarahkan apakah $\mu_K(M) < 1$. Sehingga batas atas dapat digunakan untuk menentukan syarat perlu dari teorema kerobustan dan performansi. Batas bawah μ digunakan untuk menentukan syarat cukup kerobustan dan performansi nilai singular terstruktur μ . Akibatnya batas atas μ akan mempertahankan kerobustan dari sifat transformasi fraksional linier untuk perturbasi sehingga sesuai yang diinginkan. Selanjutnya batas bawah μ akan menunjukkan perturbasi yang kecil karena derajat peluruhan sifat-sifat transformasi fraksional linier. Selanjutnya akan digunakan nilai singular terstruktur μ untuk menentukan $\mu_K(M) < 1$. Perhatikan bahwa untuk dua struktur ketakpastian. Maka untuk D_1 yang menyatakan himpunan matriks penskala dua struktur D_1 dan D menyatakan himpunan diagonal.

4.2 Lemma Redheffer, 1959

Jika diberikan matriks M pada persamaan (6). Jika terdapat $D \in \mathcal{D}$ sedemikian hingga $\bar{\sigma}(D^{-1/2} M D^{-1/2}) < 1$ maka terdapat $D_1 \in \mathcal{D}_1$ sedemikian hingga

$$\max_{\Delta_1 \in \mathcal{B}_1} \bar{\sigma}(D_1^{-1/2} \zeta(M, \Delta_1) D_1^{-1/2}) < 1$$

4.3 Algoritma Pangkat Batas Bawah μ

Pada bagian ini menjelaskan algoritma secara iteratif untuk menentukan batas bawah dari nilai singular terstruktur μ . Algoritma ini merupakan kombinasi metode pangkat untuk nilai eigen dan nilai singular. Algoritma ini digunakan untuk kekonvergenan nilai batas bawah dari μ . Pada perhitungan numerik menggunakan Matlab diperoleh bahwa nilai singular terstruktur μ selalu merupakan nilai ekuilibrium dari algoritma.

Fan dan Tits menghitung nilai singular terstruktur μ dengan mereformulasikan masalah optimisasi yang halus. Fungsi yang memaksimalkan nilai singular terstruktur μ memiliki maksimum lokal tapi tidak global, sehingga metode ini hanya tepat untuk menentukan batas bawah nilai singular terstruktur μ . Pada penelitian ini ditentukan algoritma baru untuk menghitung batas bawah dari nilai singular terstruktur dan menentukan analisis kerobustan sistem dengan ketakpastian terstruktur.

Perhatikan bahwa fungsi dapat didefinisikan sebagai μ dan yang mempunyai maksimum lokal bukan maksimum global. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa titik maksimum lokal tidak menjadi nilai maksimum $\mu_x(M)$. Akibatnya batas bawah akan bergantung pada Q yang merupakan maksimum lokal dari fungsi r . Algoritma iterasi ini akan membangkitkan titik maksimum lokal Q sebagai subhimpunan proper dari maksimum lokal fungsi r , sehingga maksimum global dari fungsi ini adalah sama.

4.4 Batas Atas dari μ

Dengan menggunakan batas atas dari μ , akan ditentukan syarat perlu untuk performansi robust. Untuk uji batas atas ruang keadaan dan batas atas domain frekuensi digunakan pertaksamaan berikut:

$$\inf_{D_p \in D_p} \bar{\sigma}(D_s^{-1/2} M D_s^{-1/2}) < 1$$
$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \inf_{D_p \in D_p} \bar{\sigma}(D_c^{-1/2} e^{i\theta} I_r M D_s^{-1/2}) < 1$$

Pada ketaksamaan Uji Batas Ruang Keadaan diatas ekuivalen dengan :

$$\inf_{D_p \in D_p} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}(D_p^{-1/2} e^{i\theta} I_r M D_s^{-1/2}) < 1$$

Kondisi ini jauh lebih baik dibandingkan dengan uji batas atas nilai singular terstruktur μ dengan domain frekuensi, karena pertaksamaan diatas sama untuk matriks diagonal $D(s)$ yang harus terpenuhi untuk Ketaksamaan Uji batas ruang keadaan. Bagian berikut menyatkan hubungan ekuivalensi dari uji konstanta $D(s)$ pada domain frekuensi dengan nilai singular terstruktur μ .

$$\inf_{D \in D} \bar{\sigma}(D_p^{1/2} M D_s^{-1/2}) < 1$$

⇔

$$\inf_{D \in D} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}[D_p^{1/2} \zeta(e^{j\theta} I_n, M) D_p^{1/2}] < 1$$

⇔

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \inf_{D \in D} \bar{\sigma}[D_p^{1/2} \zeta(e^{j\theta} I_n, M) D_p^{1/2}] < 1$$

⇔

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \mu_{\Delta_p}(\zeta(e^{j\theta} I_n, M)) < 1$$

⇔

$$\mu_{\Delta_p}(M) < 1$$

⇔

kondisi I pada teorema μ

4.5 Perhitungan Numerik μ

Tujuan Perhitungan numerik μ adalah untuk memperoleh Pengontrol $K(s)$ yang menstabilkan dan matriks penskala $D(s)$, sehingga $\|DT_{\infty} D^{-1}\|_{\infty} < 1$. Karena merupakan batas atas dari nilai singular terstruktur, yang memiliki norm tak hingga dari kurang dari satu menyatakan syarat cukup untuk memenuhi kondisi kestabilan dan performansi robust.

Secara sederhana prosedur untuk perhitungan sintesis dapat diuraikan sebagai berikut :

1. Ambil $D(s)=I$ dan gunakan metode kontrol H_{∞} untuk memperoleh $K(s)$ yang meminimumkan fungsi $\|DT_{\infty} D^{-1}\|_{\infty}$.
2. Tetapkan $K(s)$, maka dapat ditentukan matriks diagonal penskala $D(s)$ yang meminimumkan fungsi $\|DT_{\infty} D^{-1}\|_{\infty}$.
3. Gunakan metode penentuan kurva, untuk memperoleh pendekatan rasional order rendah untuk $D(s)$ yang optimal pada langkah 2.
4. Jika fungsi $\|DT_{\infty} D^{-1}\|_{\infty} < 1$, maka proses berhenti. Jika gagal ulangi langkah 1

Untuk selanjutnya perhitungan numerik dengan menggunakan sintesis μ disebut Metode iterasi D - K . Secara umum metode iterasi D - K ini mengintegrasikan dua masalah optimisasi, yaitu menetapkan salah satu variabel $K(s)$ atau $D(s)$ untuk mendapatkan variabel yang lain. Selanjutnya hasil tersebut digunakan untuk meminimumkan variabel yang lain sehingga batas atas atas fungsi $\|DT_{\infty} D^{-1}\|_{\infty}$ cukup kecil. Untuk $D(s)$ yang tetap, maka masalah sintesis μ merupakan masalah sintesis

H_∞ yang dapat diselesaikan dengan menggunakan fasilitas *hinfopt.m* pada **Matlab**. Jika $K(s)$ tetap, maka masalah tersebut menjadi masalah suboptimal kontrol untuk mendapatkan $D(s)$ yang stabil dan dapat meminimumkan fungsi $\|DT_\infty D^{-1}\|_\infty$ pada setiap frekuensi.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pembahasan perhitungan numerik untuk masalah nilai singular terstruktur μ kompleks ini hanya difokuskan pada penentuan batas bawah, batas atas serta kesensitifan dari penskala $D(s)$. Dari hasil perhitungan dengan menggunakan **Matlab** perhitungan dengan sintesis μ lebih lengkap dan nilai kesalahan lebih kecil jika dibandingkan dengan metode kontrol H_∞ .

5.2 Saran

Bagi pembaca yang berminat tentang perhitungan numerik untuk masalah nilai singular terstruktur μ dapat dikembangkan lebih jauh tentang :

1. Perumuman nilai singular.
2. Perancangan pengontrol dengan sintesis μ menghasilkan pengontrol berorder tinggi, karena itu pada aplikasinya tidak praktis sehingga menimbulkan kesalahan numerik dan biaya tinggi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih yang sebesar-besarnya Penulis sampaikan kepada Ketua Lembaga Penelitian Universitas Andalas yang telah berkenan membiayai penelitian ini dan kepada seluruh pihak yang telah membantu terlaksananya penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

1. Rudianto, B and Agung TW, *Compensator of Smart Thermal Interface Plate*, Final Report RWS on System and Control ITS Surabaya, Maret 1998
2. Rudianto, B, *Perhitungan Numerik untuk Masalah NST Campuran*, Tesis Magister Matematika ITB, 2001
3. Ogata, K, *Teknik Kontrol Otomatik*, Erlangga, 1990
4. Olsder, GJ, *Mathematical System Theory*, DUM-TU Delft, 1994
5. Doyle, J, *Analysis of feedback systems with structured uncertainty*, IEEE Proceeding, Part D, 129, 242-250(1982)
6. Balas, G.J., J.C. Doyle, K. Glover, A.K. Packard and R.S. Smith, *The μ analysis and synthesis toolbox*, MathWork and MUSYN, 1998

7. Packard, A.K., and J.C. Doyle, K, *The Complex Structured Singular Value*, Automatica, 29, 71-109 (1993)
8. Young, P.M., M.P. Newlin and J.C. Doyle, *μ analysis with real parametric uncertainty*, in Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, 1991, pp. 1251-1256.
9. Fan, M.K.H., A.L. Tits and unmodeled dynamics, submitted.
10. Young, P.M., and J.C. Doyle, *Computation of μ with real and complex uncertainties*, in Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, 1990. 1230-1235.