ARTIKEL

JENIS PENELITIAN : PENELITIAN KELOMPOK

TAHUN ANGGARAN 2004

NO. 050/J.16/PL/DIK/IV-2004

EKUIVALENSI ANTARA INTEGRAL MCSHANE-PETTIS DAN INTEGRAL LEBESGUE-PETTIS

Oleh :

1. Haripamyu, M.Si	Ketua
2. Devvy Wirzaliani	Anggota
3. Ir. Hazmira Yozza, M.Si	Pembimbing

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS ANDALAS

DIBIAYAI OLEH DANA RUTIN UNAND

PADANG, 2004

EKUIVALENSI ANTARA INTEGRAL MCSHANE-PETTIS DAN INTEGRAL LEBESGUE-PETTIS

Abstract

There is an integral which is called Lebesgue-Pettis integral (Geitz,1981, Stefansson,1992, Guoju Ye, Schwabik,2002). Gordon has proved that for real valued function, the McShane and Lebesgue integral are equivalent. In this paper we construct an integral whichis called McShane-Pettis integral and we prove that the integral is equivalent with the Lebesgue-Pettis integral.

I. PENDAHULUAN

Teori integral fungsi bernilai ruang Banach telah lama berkembang seperti ilmu-ilmu lain. Sejak diperkenalkan oleh Pettis pada tahun 1938, integral Pettis fungsi terukur lemah telah dibuktikan merupakan suatu tantangan untuk analisis. Pettis membahas definisi dan sifat-sifat integral yang didasarkan pada fungsional linear atas ruang Banach X dan pada integral Lebesgue fungsi bernilai real.. Integral Pettis ini merupakan generalisasi dari integral Lebesgue untuk fungsi bernilai ruang Banach. Untuk selanjutnya integral Pettis ini ditulis dengan integral Lebesgue-Pettis.

Integral McShane fungsi bernilai real merupakan integral Riemann teritlak. Gordon (1990) membahas definisi dan sifat-sifat integral McShane untuk fungsi dari interval di dalam $\mathcal{R}$ ke ruang Banach. Pfeffer (1993) menyusun teori integral McShane pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$ (bernilai real) dengan menggunakan persekitaran berupa kubus (*cubes*) dan volume yang digunakan berupa fungsi volume yang bersifat umum (aditif dan non negatif). Pada tahun 1994, Gordon membuktikan bahwa untuk fungsi bernilai real, integral Lebesgue ekuivalen dengan integral McShane. Dengan menggunakan hasil tersebut, Guoju dan Schwabik (2002) membandingkan integral Lebesgue-Pettis dengan integral McShane fungsi yang memetakan interval kompak I_0 di dalam $\mathcal{R}^n$ ke ruang Banach X. Dari hasil penelitian tersebut diperoleh bahwa terdapat ekuivalensi antara integral McShane dan integral Lebesgue-Pettis.

Berdasarkan uraian di atas akan dibangun suatu definisi integral yang diberi nama integral McShane-Pettis. Selanjutnya akan diselidiki ekuivalensi antara integral Lebesgue-Pettis dan integral McShane-Pettis.

II. PERUMUSAN MASALAH

Masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah menyelidiki ekuivalensi antara integral Lebesgue-Pettis dan integral McShane-Pettis. Untuk itu dikonstruksikan terlebih dahulu suatu integral yang didasarkan pada fungsional linear atas ruang Banach dan pada integral McShane fungsi bernilai real yang diberi nama integral McShane-Pettis. Selanjutnya dengan menggunakan definisi dan sifat-sifat integral ini dibandingkan dengan integral Lebesgue-Pettis.

III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan untuk menambah wawasan tentang teori integral, khususnya mengenai integral McShane-Pettis pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$. Pada dasarnya penelitian ini bertujuan untuk membahas ekuivalensi antara integral McShane-Pettis dan integral Lebesgue-Pettis.

IV. TINJAUAN PUSTAKA

Teori integral fungsi bernilai ruang Banach telah lama berkembang seperti ilmu-ilmu lain. Pada tahun 1938, Pettis memperkenalkan suatu integral fungsi terukur lemah yang dinamakan integral Lebesgue-Pettis. Pettis membahas definisi dan sifat-sifat integral ini yang didasarkan pada fungsional linear atas ruang Banach X dan pada integral Lebesgue fungsi bernilai real.

Definisi 1. *Diberikan sel $E \subset \mathcal{R}^n$ dan X ruang Banach. Fungsi $f : \mathcal{R}^n \to X$ dikatakan terukur lemah pada E jika fungsi $x^*(f) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ merupakan fungsi terukur pada E untuk setiap $x^* \in X^*$.*
Fungsi $f : E \to X$ dan $g : E \to X$ dikatakan ekuivalen lemah pada sel E jika untuk setiap $x^* \in X^*$, $x^*(f(\bar{t})) = x^*(g(\bar{t}))$ hampir di mana-mana pada E.

Definisi 2. *Diberikan sel $E \subset \mathcal{R}^n$. Fungsi $f : E \to X$ dikatakan terintegral Lebesgue-Pettis jika untuk setiap setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral Lebesque pada A sehingga*

$$x^*(x_{(f,A)}) = (L)\int_A x^*(f).$$

Teorema 3. *Jika f terintegral Lebesgue-Pettis pada sel E yaitu untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada A memenuhi*

$$x^*(x_{(f,A)}) = (L)\int_A x^*(f).$$

maka nilai $x_{(f,A)}$ tunggal.

Bukti : Jika untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ ada $y_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada A dengan sifat

$$x^*(y_{(f,A)}) = (L)\int_A x^*(f).$$

Oleh karena itu $x^*(x_{(f,A)} - y_{(f,A)}) = x^*(x_{(f,A)}) - x^*(y_{(f,A)}) = 0$ untuk setiap $x^* \in X^*$
yaitu $x^*(x_{(f,A)} - y_{(f,A)}) = 0$ untuk setiap $x^* \in X^*$.
Akibatnya $x_{(f,A)} - y_{(f,A)} = 0$ sehingga $x_{(f,A)} = y_{(f,A)}$. $\square$

Koleksi semua fungsi terintegral Lebesgue-Pettis pada E dilambangkan dengan $\mathcal{LP}(E)$. Selanjutnya vektor $x_{(f,A)} \in X$ yang dimaksud dalam teorema di atas disebut nilai integral Lebesgue -Pettis fungsi f pada $A \subset E$ dan di tulis

$$x_{(f,A)} = (LP) \int_A f .$$

Jadi $x^*(x_{(f,A)}) = x^*\left((LP)\int_A f\right) = (L)\int_A x^*(f).$

Teorema 4. *Jika $f, g \in LP(E)$ dan α skalar, maka berlaku :*

(i) $f + g \in \mathcal{LP}(E)$ dan $(LP)\int_A f + g = (LP)\int_A f + (LP)\int_A g$.

(ii) $\alpha f \in \mathcal{LP}(E)$ dan $(LP)\int_A \alpha f = \alpha\left((LP)\int_A f\right)$.

Bukti: (i) Karena $f \in \mathcal{LP}(E)$ berarti untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada A sehingga

$$x^*(x_{(f,A)}) = (L)\int_A x^*(f).$$

Karena $g \in \mathcal{LP}(E)$ berarti untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(g,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(g)$ terintegral Lebesgue pada A sehingga

$$x^*(x_{(g,A)}) = (L)\int_A x^*(g).$$

Karena X^* ruang linear maka

$$x^*(x_{(f,A)} + x_{(g,A)}) = x^*(x_{(f,A)}) + x^*(x_{(g,A)}).$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} x^*(x_{(f,A)} + x_{(g,A)}) &= (L)\int_A x^*(f) + (L)\int_A x^*(g) \\ &= (L)\int_A x^*(f+g). \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $A \subset E$ terdapat vektor $z_{((f+g),A)} = x_{(f,A)} + x_{(g,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f+g)$ terintegral Lebesgue pada A sehingga

$$x^*(z_{((f+g),A)}) = (L)\int_A x^*(f+g).$$

Jadi $x^*(z_{((f+g),A)}) = x^*\left((LP)\int_A (f+g)\right)$

$$= x^*\left((LP)\int_A f\right) + x^*\left((LP)\int_A g\right) = x^*\left((LP)\int_A f + (LP)\int_A g\right)$$

Dengan kata lain $f + g \in \mathcal{LP}(E)$ dan $(LP)\int_A f + g = (LP)\int_A f + (LP)\int_A g$.

(ii) Diambil $A \subset E$ himpunan terukur sebarang, terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada A sehingga

$$x^*(x_{(f,A)}) = (L)\int_A x^*(f) = x^*\left((LP)\int_A f\right).$$

Karena untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $\alpha x^*(f)$ juga terintegral Lebesgue pada A maka

$$x^*(\alpha x_{(f,A)}) = \alpha x^*(x_{(f,A)}) = \alpha((L)\int_A x^*(f)) = (L)\int \alpha x^*(f) = (L)\int_A x^*(\alpha f).$$

Jadi untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat $\alpha\, x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(\alpha f)$ terintegral Lebesgue pada A sehingga

$$x^*(\alpha\, x_{(f,A)}) = (L)\int_A x^*(\alpha f).$$

Dengan kata lain terbukti $\alpha f \in LP(E)$ dan

$$x^*(\alpha\, x_{(f,A)}) = x^*((LP)\int_A \alpha f) = x^*\left(\alpha(LP)\int_A f\right).$$

Jadi $(LP)\int_A \alpha f = \alpha\left((LP)\int_A f\right)$. □

Berdasarkan Teorema 4 terbukti bahwa $LP(E)$ merupakan ruang linear.

Pfeffer (1993) menyusun teori integral McShane pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ (bernilai real) dengan menggunakan persekitaran berupa kubus (cubes) dan volume yang digunakan berupa fungsi volume yang bersifat umum (aditif dan non negatif).

Berikut ini disajikan definisi dan beberapa sifat dasar integral McShane fungsi yang terdefinisi pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$.

Definisi 5. *Diberikan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Fungsi $f : E \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral McShane pada E jika terdapat $S \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ yang didefinisikan pada E dengan sifat untuk setiap partisi McShane δ-fine $\mathcal{D} = \{(I, \bar{\xi})\} = \{(I_1, \bar{\xi}_1), \ldots, (I_q, \bar{\xi}_q)\}$ pada E berlaku*

$$\left|(\mathcal{D})\sum f(\bar{\xi})\mu(I) - S\right| = \left|\sum_{i=1}^{q} f(\bar{\xi}_i)\mu(I_i) - S\right| < \varepsilon$$

dengan $\mu(I)$ menyatakan ukuran Lebesgue pada sel I.

Fungsi $f : E \to \mathbb{R}$ terintegral McShane pada himpunan terukur $A \subset E$ jika $f\chi_A$ terintegral McShane pada E dengan χ_A fungsi karakteristik pada A.

Teorema 6. *Jika $f, g: E \to R$ terintegral McShane pada sel $E \subset R^n$ dan c suatu skalar, maka $f + g$ dan cf terintegral McShane pada E dan*

$$(M)\int_E (f+g) = (M)\int_E f + (M)\int_E g \quad \text{dan} \quad (M)\int_E cf = c\left((M)\int_E f\right).$$

Teorema 7. (Kriteria Cauchy)

Fungsi $f : E \to R$ terintegral McShane pada sel E jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi McShane δ-fine $P_1 = \{(I, \bar{\xi})\}$ dan $P_2 = \{(I, \bar{\xi})\}$ pada E berlaku

$$\left| (P_1) \sum f(\bar{\xi})\mu(I) - (P_2) \sum f(\bar{\xi})\mu(I) \right| < \varepsilon .$$

Pada tahun 1994, Gordon membuktikan bahwa untuk fungsi bernilai real, integral Lebesgue ekuivalen dengan integral McShane.

Dengan menggunakan hasil tersebut, Guoju dan Schwabik (2002) membandingkan integral Lebesgue-Pettis dengan integral McShane fungsi yang memetakan interval kompak I_0 di dalam $\mathcal{R}^n$ ke ruang Banach X.

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menggunakan definisi dan sifat-sifat integral McShane dan integral Lebesgue-Pettis akan dibangun definisi integral McShane-Pettis pada ruang Euclide $\mathcal{R}^n$ dan diselidiki ekuivalensi antara integral McShane-Pettis dengan integral Lebesgue-Pettis.

Definisi *Diberikan sel $E \subset R^n$. Fungsi $f : E \to X$ dikatakan terintegral McShane-Pettis jika untuk setiap setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A sehingga*

$$x^*(x_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f).$$

Teorema *Jika f terintegral McShane-Pettis pada E yaitu untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)} \in X$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A memenuhi*

$$x^*(x_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f).$$

maka nilai $x_{(f,A)}$ tunggal.

Bukti : Andaikan untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$ ada $y_{(f,A)} \in X$ *dan untuk* setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A dengan sifat

$$x^*(y_{(f,A)}) = (M)\int_A x^*(f)$$

sehingga diperoleh

$x^*(x_{(f,A)} - y_{(f,A)}) = x^*(x_{(f,A)}) - x^*(y_{(f,A)}) = 0$ untuk setiap $x^* \in X^*$, yaitu $x^*(x_{(f,A)} - y_{(f,A)}) = 0$ untuk setiap $x^* \in X^*$.

Akibatnya $x_{(f,A)} - y_{(f,A)} = 0$ sehingga $x_{(f,A)} = y_{(f,A)}$.

Koleksi semua fungsi terintegral McShane-Pettis pada E dilambangkan dengan $\mathcal{MP}(E)$. Selanjutnya vektor $x_{(f,A)} \in X$ yang dimaksud dalam teorema di atas disebut nilai integral McShane -Pettis fungsi f pada $A \subset E$ dan di tulis

$x_{(f,A)} = (MP) \int_A f$.

Jadi $x^*(x_{(f,A)}) = x^*\left((MP)\int_A f\right) = (M)\int_A x^*(f)$.

Teorema *Jika $f, g \in \mathcal{MP}(E)$ dan α skalar, maka berlaku :*

(iii) $f + g \in \mathcal{MP}(E)$ *dan* $(MP)\int_A f + g = (MP)\int_A f + (MP)\int_A g$.

(iv) $\alpha f \in \mathcal{MP}(E)$ *dan* $(MP)\int_A \alpha f = \alpha\left((MP)\int_A f\right)$.

Berdasarkan teorema di atas terbukti bahwa $\mathcal{MP}(E)$ merupakan ruang linear.

EKUIVALENSI ANTARA INTEGRAL MCSHANE-PETTIS DAN INTEGRAL LEBESGUE-PETTIS

Pada bagian ini dibuktikan ekuivalensi antara integral McShane-Pettis dan integral Lebesgue-Pettis yaitu dengan menunjukkan bahwa $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada setiap himpunan terukur $A \subset E$ jika dan hanya jika $x^*(f)$ terintegral McShane pada A.

Teorema (Teorema Kekonvergenan Monoton)

Diberikan fungsi f pada sel $E \subset R^n$ dan $\{x^*(f_n)\}$ barisan yang terintegral McShane pada setiap himpunan terukur $A \subset E$ Jika $\{x^*(f_n)\}$ barisan monoton yang konvergen ke $x^*(f)$ pada A dan $\lim (M)\int_A x^*(f_n)$ *ada maka $x^*(f)$ terintegral McShane pada A dan* $(M)\int_A x^*(f) = \lim (M)\int_A x^*(f_n)$.

Teorema (Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue)

Diberikan fungsi f pada sel $E \subset R^n$. Misalkan barisan $\{x^*(f_n)\}$ dan g terintegral McShane pada himpunan terukur $A \subset E$ dan $|x^*(f_n)| \le g$ untuk setiap n. Jika $\{x^*(f_n)\}$ konvergen ke $x^*(f)$ pada A maka $x^*(f)$ terintegral McShane pada A dan $(M)\int_A x^*(f) = \lim (M)\int_A x^*(f_n)$

Teorema *Diberikan sel* $E \subset R^n$. *Jika fungsi* $f : E \to X$ *terukur lemah pada* E *dan untuk setiap* $x^* \in X^*$ *fungsi* $x^*(f)$ *terbatas pada* E *maka* $x^*(f)$ *terintegral McShane pada setiap himpunan terukur* $A \subset E$ *dan*

$$(M)\int_A x^*(f) = (L)\int_A x^*(f).$$

Bukti: Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$. Karena fungsi $x^*(f)$ terbatas pada E berarti terdapat bilangan M sehingga $|x^*(f(\bar{t}))| \leq M$ untuk setiap $\bar{t} \in E$. Menurut Teorema Lusin terdapat himpunan terukur $B \subset E$, $\mu(C) < \frac{\varepsilon}{6M}$ dengan $C = E - B$ dan fungsi kontinu $g : E \to \mathcal{R}$ sehingga $x^*(f) = g$ pada B. Fungsi g juga terbatas dan terukur pada E. Karena g terintegral McShane pada B, terdapat fungsi positif δ_I pada B sehingga untuk setiap dua partisi McShane, δ_I-fine $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ pada E berlaku

$$\left|(\mathcal{P}_1)\sum g\chi_B(\bar{t})\mu(I) - (\mathcal{P}_2)\sum g\chi_B(\bar{t})\mu(I)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Karena C terukur dan $\mu(C) < \frac{\varepsilon}{6M}$, terdapat himpunan terbuka G sehingga $C \subset C$ dan $\mu(G) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Didefinisikan fungsi positif δ pada E dengan aturan $\delta(\bar{t}) = \delta_I(\bar{t})$ untuk setiap $\bar{t} \in B$ dan $\delta(\bar{t}) = d(\bar{x}, \partial(G))$ untuk setiap $\bar{t} \in E - B$. Dengan demikian untuk setiap dua partisi McShane δ-fine $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ pada E berlaku

$$\left|(\mathcal{D}_1)\sum x^*(f\chi_B(\bar{t}))\mu(I) - (\mathcal{D}_2)\sum x^*(f\chi_B(\bar{t}))\mu(I)\right|$$
$$= \left|(\mathcal{D}_1)\sum g\chi_B(\bar{t})\mu(I) - (\mathcal{D}_2)\sum g\chi_B(\bar{t})\mu(I)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jadi $x^*(f\chi_B)$ terintegral McShane pada E. Dengan kata lain $x^*(f)$ terintegral McShane pada B.

Diambil sebarang himpunan terukur $A \subset E$:

(a) jika $A \subset B$ maka jelas $x^*(f)$ terintegral McShane pada A.

(b) jika $A \cap B = \varnothing$, berarti $A \subset E - B$ diperoleh

$$\left|(\mathcal{D}_1)\sum x^*(f\chi_A(t))\mu(I) - (\mathcal{D}_2)\sum x^*(f\chi_A(t))\mu(I)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(c) jika $A \cap B \neq \varnothing$ maka $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ dan

$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B)$ dengan $\mu(A - B) \leq \mu(E - B) < \frac{\varepsilon}{6M}$

dan $\mu(A \cap B) \leq \mu(B)$ sehingga diperoleh

$$\left|(\mathcal{D}_1)\sum x^*(f\chi_A(t))\mu(I) - (\mathcal{D}_2)\sum x^*(f\chi_A(t))\mu(I)\right|$$
$$= \left|(\mathcal{D}_1)\sum x^*(f\chi_{A-B}(\bar{t}))\mu(I) + (\mathcal{D}_1)\sum x^*(f\chi_{A\cap B}(\bar{t}))\mu(I) - \right.$$
$$\left.(\mathcal{D}_2)\sum x^*(f\chi_{A-B}(\bar{t}))\mu(I) - (\mathcal{D}_2)\sum x^*(f\chi_{A\cap B}(\bar{t}))\mu(I)\right|$$

$$\leq |(\mathcal{D}_1) \sum x^*(f\chi_{A-B}(\bar{t}))\mu(I) - (\mathcal{D}_2) \sum x^*(f\chi_{A-B}(\bar{t}))\mu(I)| + |(\mathcal{D}_1) \sum x^*(f\chi_{A\cap B}(\bar{t}))\mu(I) - (\mathcal{D}_2) \sum x^*(f\chi_{A\cap B}(\bar{t}))\mu(I)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Dari (a), (b) dan (c) diperoleh bahwa $x^*(f)$ terintegral McShane pada A.

Karena $x^*(f)$ terbatas dan terukur pada sel E maka $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada E. Selanjutnya $x^*(f)$ juga terintegral Lebesgue pada $A \subset E$. Jadi untuk setiap partisi McShane δ-fine $\mathcal{P}$ pada E berlaku

$$|(\mathcal{P}) \sum x^*(f\chi_A(t))\mu(I) - (L)\int_E x^*(f\chi_A)|$$

$$\leq |(\mathcal{P}) \sum x^*(f\chi_A(t))\mu(I) - (\mathcal{P}) \sum g\chi_B(\bar{t})\mu(I)| + |(\mathcal{P})\sum_{\delta} g\chi_B(\bar{t})\mu(I) - (M)\int_E g\chi_B| + (L)\int_E |g\chi_B - x^*(f\chi_A)|$$

$$< 2M\,\mu(G) + \frac{\varepsilon}{3} + 2M\mu(C)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < 2\,\varepsilon.$$

Jadi terbukti x^*f terintegral McShane pada A dan

$(M)\int_A x^*(f) = (L)\int_A x^*(f)$. □

Dengan memperhatikan pengertian partisi Perron δ-*fine* dan partisi McShane δ-*fine* pada sel $E \subset \Re^n$, diperoleh hasil bahwa setiap fungsi terintegral McShane pada sel E terintegral Henstock-Kurzweil pada E. Teorema berikut juga berlaku untuk fungsi terintegral McShane.

Teorema (Lee, 1989)

Jika fungsi f terintegral Henstock-Kurzweil pada sel $E \subset \Re^n$ maka f terukur.

Teorema *Diberikan $E \subset R^n$ sel, $A \subset E$ terukur, $x^* \in X^*$ dan fungsi $f: E \to X$. Fungsi $x^*(f)$ terintegral McShane pada A jika dan hanya jika $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada A dan*

$$(M)\int_A x^*(f) = (L)\int_A x^*(f).$$

Bukti: Syarat perlu. Karena $x^*(f)$ terintegral McShane pada A maka terdapat barisan fungsi sederhana naik monoton $\{x^*(f_n)\}$ konvergen ke $x^*(f)$ pada A. Oleh karena itu diperoleh $(M)\int_A x^*(f) = \lim (M)\int_A x^*(f_n)$ .Untuk setiap n dibentuk fungsi

$$x^*(f_n(\bar{t})) = \begin{cases} x^*(f(\bar{t})) & , x^*(f(\bar{t})) \le n \\ 0 & , x^*(f(\bar{t})) > n \end{cases}$$

Jelas $x^*(f_n)$ terukur dan terbatas pada A sehingga diperoleh $x^*(f_n)$ terintegral Lebesgue pada A dan $(M)\int_A x^*(f_n) = (L)\int_A x^*(f_n)$. Dengan menggunakan teorema kekonvergenan terdominasi diperoleh $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada A dan

$$(L)\int_A x^*(f) = \lim (L)\int_A x^*(f_n) = \lim (M)\int_A x^*(f_n) = (M)\int_A x^*(f).$$

Syarat cukup Tak mengurangi arti jika $x^*(f)$ tak negatif pada A. Untuk setiap n dibentuk fungsi

$$x^*(f_n(\bar{t})) = \begin{cases} x^*(f(\bar{t})) & , x^*(f(\bar{t})) \le n \\ 0 & , x^*(f(\bar{t})) > n \end{cases}$$

Fungsi $x^*(f_n)$ terukur dan terbatas pada A. Dengan demikian $x^*(f_n)$ terintegral Lebesgue pada A. Lebih lanjut $x^*(f_n)$ merupakan barisan naik monoton pada A dan $\lim x^*(f_n) = x^*(f)$. Jadi

$$(L)\int_A x^*(f) = \lim (L)\int_A x^*(f_n) \qquad (1)$$

Menurut teorema sebelumnya, fungsi $x^*(f_n)$ terintegral McShane pada setiap himpunan terukur $A \subset E$ dan

$$(M)\int_A x^*(f_n) = (L)\int_A x^*(f_n) \qquad (2)$$

Selanjutnya dari Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue diperoleh $x^*(f)$ terintegral McShane pada A dan

$$(M)\int_A x^*(f) = \lim (M)\int_A x^*(f_n) \qquad (3)$$

Dari (1), (.2) dan (3) terbukti bahwa $(M)\int_A x^*(f) = (L)\int_A x^*(f)$.

Berdasarkan beberapa teorema yang telah dibahas di atas, terbukti bahwa integral McShane-Pettis ekuivalen dengan integral Lebesgue-Pettis yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema *Diberikan $E \subset R^n$ sel dan fungsi $f: E \to X$. Fungsi $f \in MP(E)$ jika dan hanya jika $f \in LP(E)$* dengan

$$(MP)\int_A f = (LP)\int_A f$$

untuk setiap himpunan terukur $A \subset E$.

KESIMPULAN

Ekuivalensi integral McShane-Pettis dan Lebesgue-Pettis dibuktikan dengan menunjukkan bahwa $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada setiap himpunan terukur $A \subset E$ jika dan hanya jika $x^*(f)$ terintegral McShane pada A.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Geitz, R.F., *Pettis Integration.*, Proc. of the Amer. Math. Soc., vol 82, pp. 81-86, 1981.

[2] Gordon, R.A., *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, American Mathematical Society, UK, 1994.

[3] Lee, P.Y., *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore, 1989.

[4] Pfeffer, W.F., *The Riemann Approach to Integration: Local geometric theory*, Cambridge University Press, 1993.

[5] Schwabik, S. and Guoju, Y. *The McShane and The Pettis Integral of Banach Space-Valued Function Defined on* $\Re^m$, joined research result, 2002.

[6] Wheeden, R.L and Zygmund, A., *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker Inc, New York and Basel, 1977.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penilis mengucapkan terima kasih kepada:

a. Lembaga Penelitian Universitas Andalas yang telah memberikan dana, sehingga penelitian ini dapat terlaksana.

b. Dekan FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan kesempatan kepada kepada penulis untuk melakukan penelitian ini,

c. Ketua jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.

d. Ir. Hazmira Yozza, M.Si yang telah membimbing penulis

Padang, Oktober 2004

Penulis