Model Stokastik Pertumbuhan Populasi Merupakan Proses Difusi
dan Memenuhi Persamaan Kolmogorov

Oleh Zulakmal
Jurusan Matematika Universitas Andalas

Abstak

Pertumbuhan populasi merupakan proses stokastik dan proses markov sehingga model pertumbuhannya dapat diasumsikan sebagai model stokastik. Dengan menggunakan hukum peluang dan dihubungkan dengan definisi proses difusi maka diperoleh suatu persamaan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial ini mempunyai koefisien yang disebut juga koefisien difusi. Persamaan ini juga dinamakan persamaan Kolmogorov untuk pertumbuhan populasi.

Kata kunci : proses stokastik, proses Markov, proses difusi, koefisien difusi, persamaan Kolmogorov

I. PENDAHULUAN

Pemodelan merupakan salah satu ilmu yang berkembang saat ini. Gejala-gejala alam dan perkembangannya menarik untuk diteliti dan bisa dimodelkan apabila didukung oleh data yang valid sehingga model dapat dirumuskan dalam bentuk formula matematika. Perkembangan dari masa ke masa banyak model yang telah ditemukan oleh ahli matematika.

Dalam meneliti sistem alam, biasanya problem utamanya adalah bagaimana memperoleh model matematika untuk merespon gejala alam tadi. Waktu merupakan variabel input yang sangat berperan dalam memodelkan gejala alam tersebut. Hampir semua model dari gejala alam ini adalah model stokastik. Dalam membahas model ini adalah penting untuk menguji rumus dalam teori peluang.

Pertumbuhan populasi dalam ilmu biologi termasuk sistem yang ada di alam dengan demikian dapat diterapkan atau digunakan dan dianalisa penggunaan rumus rumus dalam teori peluang terhadap kelakuan dan perkembanga alam tersebut.

II. PERUMUSAN MASALAH

Dalam tulisan ini akan ditinjau proses stokastik dengan ruang state kontinu dan ruang parameter kontinu yang melibatkan hukum peluang, yaitu momen pertama dan kedua. Momen pertama dikenal dengan mean atau rata-rata. Dalam hal khusus, proses Markov dengan ruang state kontinu dan ruang parameter kontinu dikenal dengan proses difusi dengan momen pertama dan kedua sebagai koefisien- koefisien difusi.

Proses Markov dengan ruang state kontinu dan ruang parameter kontinu terdapat juga pada pertumbuhan populasi yang merupakan proses difusi.

III. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam tulisan ini ada beberapa definisi dan teorema yang diperlukan untuk melengkapi tulisan ini, definisi dan teoremanya sebagai berikut :

Definisi 1

Proses Stokastik adalah suatu keluarga dari variabel random $\{X(t), t \in T\}$, dengan $T = \{ t : t \geq 0\}$ dan t bilangan real

Dalam ilmu Biologi dan beberapa bidang lainnya, parameter t adalah waktu dan himpunan T merupakan ruang parameter. Pada pembahasan ini S_t merupakan ruang sampel dari X(t) dan S_t disebut ruang *state* dan anggota dari S_t merupakan *state-state*. Jika ruang S_t diskrit maka anggota S_t ada dua kemungkinan yaitu, berhingga atau tak berhingga, dan jika ruang S_t kontinu maka anggota S_t tak terhingga. Untuk ruang parameter T yang terdiri dari diskrit dan kontinu dimana anggotanya sama seperti ruang *state*. Dengan demikian proses stokastik dapat dibedakan dalam beberapa tipe yaitu :

1. Proses stokastik dengan ruang *state* diskrit dan waktu t diskrit.

2. Proses stokastik dengan ruang *state* diskrit dan waktu t kontinu.
3. Proses stokastik dengan ruang *state* kontinu dan waktu t diskrit.
4. Proses stokastik dengan ruang *state* kontinu dan waktu t kontinu.

Definisi 2

Diberikan $\{X(t), t \in T\}$ proses stokastik dengan ruang parameter T dan ruang state S. X(t) dikatakan proses Markov jika hanya jika untuk setiap n dan setiap $t_1 < t_2 < \ldots t_n \le t \in T$,

$$P_r\{X(t) \in A | X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\} = P_r\{X(t) \in A | X(t_n) = x_n\},$$

untuk suatu kejadian $A \subset S$, dimana $P_r\{X(t) \in A | X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\}$ adalah peluang bersyarat dari $X(t) \in A$ diberikan $\{X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\}$ dan $P_r\{X(t) \in A | X(t_n) = x_n\}$ peluang bersyarat dari $X(t) \in A$ diberikan $X(t_n) = x_n$.

Misalkan $\{X(t), t \ge 0\}$ proses stokastik dengan ruang parameter kontinu $T = \{t \ge 0\}$ dan ruang state kontinu $S = [a,b]$, (a boleh $-\infty$ dan b boleh ∞). Misalkan $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ naik dan berubah secara kontinu dalam peluang bila dt sangat kecil loncatannya, kemudian dari loncatannya misalkan $\varepsilon > 0$ akan menuju nol. Dalam beberapa masalah praktis, diasumsikan jika $dt \cong 0$, suatu kemungkinan momen-momen yang mempunyai order yang lebih tinggi (dengan kata lain order ≥ 3) dari dX(t) diabaikan. Mempunyai peranan penting dalam proses stokastik yang hanya melibatkan momen pertama dan kedua dari dX(t). Jika proses ini proses Markov, maka X(t) diklasifikasikan sebagai proses difusi.

Definisi 3

Diketahui X(t) proses stokastik Markov dengan ruang parameter $T = \{t \ge 0\}$ dan ruang state $S = [a,b]$. X(t) dikatakan proses difusi dengan koefisien-koefisien difusinya $\{m(x,t), v(x,t)\}$ jika dan hanya jika memenuhi kondisi :

1. Diberikan $\varepsilon > 0$, untuk $x \in S$ dan $t \ge 0$,

$$P\{\,|X(t+dt) - X(t)| \ge \varepsilon \,|\, X(t) = x\} = o(dt)$$

dimana o(dt) suatu fungsi yang mempunyai $\lim\limits_{dt \to 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$

2. Terdapat fungsi kontinu m(x,t) dan $x \in S$ dan untuk $t \ge 0$,

$$E\,[(X(t+dt) - X(t)) | X(t) = x] = m(x,t)\,dt + o(dt)$$

3. Terdapat fungsi kontinu v(x,t) dan $x \in S$ dan untuk $t \ge 0$,

$$E\,\{\,|X(t+dt) - x(t)|^2 / X(t) = x\} = v\,(x,t)dt + o(dt)$$

4. Untuk $x \in S$ dan $t \ge 0$ maka $E\,\{\,|X(t+dt) - X(t)|^r / X(t) = x\} = o(dt)$ jika $r \ge 3$.

Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ mempunyai ruang parameter T dan ruang *state* kontinu dan memenuh kondisi 1 dalam definisi di atas dikatakan proses stokastik kontinu.

Misalkan f(x,y;s,t) *pdf* bersyarat dari X(t) pada y diberikan X(s) = x, sehingga kondisi 1 pada definisi di atas dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu (a). untuk suatu $\varepsilon > 0$ maka $\int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} f(x,y;t,t+dt)dy$ = o(dt).

Untuk item 2–4 dalam definisi di atas ekuivalen dengan item (b), (c), dan (d) dimana kondisi (b), (c), dan (d) sebagai berikut

(b). $\int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)f(x,y;t,t+dt)dy$ = m(x,t) dt + o(dt)

(c). Untuk $\varepsilon > 0$ maka $\int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 f(x,y;t,t+dt)dy$ = v(x,t) + o(dt)

Dari (c) jika $|y-x| > \varepsilon \geq 1$ maka $|y-x|^3 \geq (y-x)^2$ sehingga

$$\int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} (y-x)^2 f(x,y;t,t+dt)dy \leq \int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} |y-x|^3 f(x,y;t,t+dt)dy = o(dt) \quad \text{..........} \quad (d)$$

Di pihak lain jika $\varepsilon < |y-x| \leq 1$ maka $(y-x)^2 \leq 1$ sehingga

$$\int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} (y-x)^2 f(x,y;t,t+dt)dy \leq \int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} (x,y;t,t+dt)dy = o(dt)\,.$$

Dari (b) dapat juga dibaca dalam bentuk pertaksamaan Schwarz yaitu

$$\int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} (y-x)f(x,y;t,t+dt)dy \leq \left\{ \int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} (y-x)^2 f(x,y;t,t+dt)dy \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon} f(x,y;t,t+dt) \right\}^{1/2}$$

Bila menggunakan *pdf* bersyarat f(x,y;s,t), dapat juga mendefinisikan proses difusi sebagai proses homogen jika dan hanya jika f(x,y;0,t-s)= f(x,y;t-s), yaitu fungsi f(x,y;s,t) tergantung dari selisih waktu t-s. Dengan kata lain proses difusi homogen bila koefisien difusi independen terhadap waktu yaitu m(x,t)=m(x) dan v(x,t) = v(x).

Diketahui $\{X(t),\ t \geq 0\}$ suatu proses difusi dengan ruang state S = [a,b] dengan koefisien-koefisien {m(x,t), v(x,t)}. Untuk $0 \leq s < t$, misalkan f(x,y;s,t) adalah pdf bersyarat dari X(t) pada y yang diberikan X(s) = x, $x \in S$ dan misalkan

$$F(x;y;s,t) = \int_a^y f(x,z;s,t)dz \quad \text{untuk } y \geq a.$$

yang mempunyai syarat awal f(x,z;s,s) = δ(y-x), δ(fungsi delta Dirac), dimana fungsi delta Dirac didefinisikan dengan $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$ untuk suatu g(x) fungsi yang dapat di integralkan dan F(x,y;s,s) = H(y-x) dimana H(x) = 1 jika x>0 dan H(x) = 0 jika $x \leq 0$.

Persamaan Chapman Kalmogorov untuk ruang state kontinu dan waktu kontinu, bila $x \in S$, $y \in S$ dan $0 \leq s \leq r \leq t < \infty$,

$$f(x,y;s,t) = \int_a^b f(x,z;s,r)f(z,y;r,t)dz \qquad (1)$$

dan

$$F(x,y;s,t) = \int_a^b f(x,z;s,r)F(z,y;r,t)dz = \int_a^b F(z,y;r,t)d_z F(x,z;s,r) \qquad (2)$$

dimana $d_z F(x,z;s,r) = f(x,z;s,r)dz$.

Seperti dalam rantai Markov, proses difusi $\{X(t),\ t \geq o\}$ dikatakan proses difusi homogen bila $f(x,y;s,t) = f(x,y;t-s)$ atau $F(x,y;s,t) = F(x,y;t-s)$. Yaitu, $f(x.y;s,t)$ atau $F(x,y;s,t)$ bergantung pada waktu s dan t yaitu selisih $s - t$. Untuk proses homogen koefisien difusinya menjadi $m(x,t) = m(x)$ dan $v(x,t) = v(x)$, dan syarat awal menjadi $f(x,y;0) = \delta(y-x)$ dan $F(x,y;0) = H(y-x)$, sehingga persamaan Chapman – Kalmogorov bila $x \in S$, $y \in S$ dan $0 \leq r \leq t < \infty$ menjadi

$$f(x,y;t) = \int_a^b f(x,z;r) f(z,y;t-r)dz, \tag{3}$$

dan

$$F(x,y,t) = \int_a^b f(f,z;r)F(z,y;t-r)dz \tag{4}$$

$$= \int_a^b F(z,y;t-r)d_z(x,z;r)$$

Penggunaan persamaan (1 dan 2) atau (3 dan 4) bagi proses difusi, pada kasus rantai Markov dengan waktu kontinu, adalah untuk memperoleh persamaan mundur dan maju Kolmogorov.

Teorema di bawah ini menunjukkan bahwa pdf bersyarat $f(x,y;s,t)$ dapat menenuhi persamaan maju Kolmogorov. Persamaan ini dikatakan persamaan maju karena derivatifnya diperoleh berkenaan dengan waktu t.

Teorema 1

Misalkan $\{X(t),\ t \geq 0\}$ proses difusi dengan ruang state $S = [a,b]$ dan koefisien difusinya $\{m(x,t),\ v(x,t)\}$. Untuk setiap $y \in [a,b]$ dan $t > 0$, $\frac{\partial}{\partial y}\{m(y,t)f(x,y;s,t)\}$ dan $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{v(y,t)f(x,y;s,t)\}$ ada. Jika $\frac{\partial}{\partial t}f(x,y;s,t)$ ada dan $f(x,y;s,t)$ memenuhi persamaan diferensial parsial maka :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,y;s,t) = -\frac{\partial}{\partial y}\{m(y,t)\, f(x,y;s,t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{v(y,t)\, f(x,y;s,t)\} \tag{5}$$

dengan syarat awal $f(x,y;s,s) = \delta(y-x)$.

Persamaan (5) disebut persamaan maju Kolmogorov. Jika proses difusi ini homogen, maka persamaan maju Kalmogorov dapat ditulis

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,y;t) = -\frac{\partial}{\partial y}\{m(y)\, f(x,y;t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{v(y)\, f(x,y;t)\},$$

dengan syarat awal $f(x,y;0) = \delta\,(y-x)$.

IV. TUJUAN PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki model stokastik dari pertumbuhan populasi dimana pada tulisan ini dimisalkan bakteri sebagai populasi apakah memenuhi persamaan Kolmogorov atau tidak

V. KONSRIBUSI PENELITIAN

Penelitian ini penting dilakukan untuk melihat hubungan antara suatu populasi dengan proses difusi dan hubungannya dengan persamaan Kolmogorov. Dengan demikian dapat diperoleh hubungan yang erat antara populasi dengan proses difusi sehingga kita dapat memahaminya. Disamping itu penelitian ini juga dapat menambah informasi bagi peneliti yang tertarik dengan masalah proses difusi dengan kasus lain seperti perkembangan kanker dan HIV.

VI. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dan juga mempelajari karya-karya ilmiah yang terdapat dalam jurnal, dan buku - buku teks sebagai penunjang

VII. JADWAL PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan selama liama bulan, mulai dari bulan April 2006 sampai September 2006 bersama dengan peneliti yang lain.

VIII. PERSONALIA PENELITI

1. Zulakmal, M.Si., sebagai Peneliti Utama
2. DR. Susila Bahri, M.Sc, sebagai pembimbing
3. Eris Wira Setiawan, sebagai Anggota

IX. HASIL PENELITIAN

Pertumbuhan dari suatu populasi dalam biologi dimisalkan pada populasi dari bakteri, dimana X(t) banyak individu dalam populasi pada saat t dan M adalah jumlah populasi maksimum. $\{X(t), t > 0\}$ merupakan suatu proses stokastik dengan ruang state $S=\{0,1,2,\ldots,M\}$. Pertumbuhan populasi di pengaruhi oleh lingkungan yang terdiri dari beberapa variabel random. Bila $Y(t) = \frac{X(t)}{M}$, dimana M jumlahnya sangat besar maka Y(t) berubah secara kontinu dalam interval [0,1] sehingga Y(t) dapat ditunjukkan sebagai proses difusi.

Selanjutnya $\{ Y(t), t > 0 \}$ akan ditunjukkan sebagai suatu proses difusi. Karena Y(t) merupakan proses stokastik kontinu, maka untuk menunjukkan hal ini Y(t) diasumsikan merupakan persamaan diferensial sehingga dapat ditulis sebagai persamaan diferensial stokastik dalam bentuk

$$\frac{d}{dy}Y(t) = \varepsilon Y(t)g[Y(t)] + u(t) \tag{6}$$

dimana $\varepsilon > 0$, $g(x)$ suatu fungsi dari x dan u(t). Persamaan di atas dapat tinjau dengan penulisan alternatif lain yaitu : $dY(t) = \varepsilon Y(t)g[Y(t)]dt + u(t)dt$ atau

$$dY(t) = \varepsilon Y(t)g[Y(t)]dt + Z(t)\sqrt{dt} \tag{7}$$

dimana $Z(t) = u(t)\sqrt{dt}$.

Persamaan (6) dan (7) merupakan alat untuk memproses model pertumbuhan. Dalam persamaan (6) dan (7), suku pertama dari dY(t) digambarkan sebagai perubahan yang terjadi dalam lingkungan yang sistimatis dan sering juga digunakan sebagai gambaran pertumbuhan populasi *deterministic*, sementara suku kedua u(t) dan Z(t)dt merupakan *random noise* yang diasumsikan mempunyai ekpektasi nol, *random noise* adalah pengaruh yang masuk pada variabel random sehingga variabel random terganggu dalam perubahan pada selang [t,t+dt].

Untuk memperoleh Y(t) sebagai proses difusi, diasumsikan bahwa

$$E[Z(t)/Y(t) = y] = 0$$

$$Var[Z(t)/Y(t) = y] = \sigma^2(y,t) > 0$$

$$E\{ [Z(t)]^r/Y(t) = y\} = o(dt,y) \text{ untuk } r \geq 3,$$

dimana $\lim_{dt \to 0} \frac{o(dt,t)}{dt} = 0$ bila $0 < y < 1$ dan $t > 0$, juga diasumsikan bahwa *pdf* bersarat $f(y,t)$ bagi Y(t) dengan yarat $Y(t_0) = y_0$ dan memenuhi $\lim_{y \to 0} f(y,t) = \lim_{y \to 1} f(y,t) = 0$ untuk semua $t \geq 0$.

Bila asumsi di atas dipenuhi, akan maka proses stokastik $\{Y(t), t \geq 0\}$ merupakan suatu proses difusi dengan ruang state [0,1] dan mempunyai koefisien difusi $m(y,t) = \varepsilon y g(y)$ dan $v(y,t) = \sigma^2(y,t)$.

Untuk menunjukkan Y(t) suatu proses difusi perhatikan dimana

$$dY(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t).$$

sehingga

$$\begin{aligned}\psi(y,t;\Delta t) &= E\{ \exp[-\theta dY(t)]/Y(t)=y\} \\ &= 1 - \varepsilon\theta y g(y)\Delta t + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2(y,t)\,\Delta t + o(\Delta t,y)\end{aligned}$$

dan $\lim_{\Delta t \to 0} o\left(\frac{\Delta t, y}{\Delta t}\right) = 0$ bila $0 \leq y \leq 1$ untuk $t \geq 0$.

Untuk $\theta > 0$ dimana :

$$\phi(\theta, t) = E\{\exp[-\theta Y(t)]/ Y(t_0) = y_0\} = \int_0^1 e^{-\theta y} f(y,t)dy$$

kemudian,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\theta,t) &= \int_0^1 e^{-\theta y} \frac{\partial f(y,t)}{\partial t}\,dy \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\{\phi(\theta, t+\Delta t) - \phi(\theta,t)\} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\{[\exp(-\theta Y(t+\Delta t)) - \exp(-\theta Y(t))]/Y(t_0) = y_0\}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 e^{-\theta y} \{\psi(y,t;\Delta t) - 1\} f(y,t) dy$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 e^{-\theta y} \{-\theta \varepsilon y g(y) + \tfrac{1}{2}\theta^2 \sigma^2(y,t)\Delta t + o(\Delta t)\} f(y,t) dy$$

$$= \int_0^1 e^{-\theta y} \{-\theta \varepsilon y g(y) + \tfrac{1}{2}\theta^2 \sigma^2(y,t)\} f(y,t) dy \qquad (8)$$

di lain pihak

$$\int_0^1 e^{-\theta y} \{-\theta y\, g(y)\} f(y,t) dy = \int_0^1 y\, g(y) f(y,t)\, d(e^{-\theta y})$$

$$= -\int_0^1 e^{-\theta y} \left\{ \frac{\partial}{\partial y}[y\, g(y) f(y,t)] \right\} dy \qquad (9)$$

dan

$$\int_0^1 e^{-\theta y} \{\tfrac{1}{2}\theta^2 \sigma(y,t)\} f(y,t) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta \sigma^2(y,t) f(y,t)\, d(e^{-\theta y})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\theta y} \theta \left\{ \frac{\partial}{\partial y}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] \right\} dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial y}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] \right\} d(e^{-\theta y})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\theta y} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] \right\} dy \qquad (10)$$

Persamaan (9) dan (10) disubsitusikan ke (8) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\theta,t) = \int_0^1 e^{-\theta y} \left\{ -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} y g(y) f(y,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma^2(y,t) f(y,t) \right\} dy$$

$$= \int_0^1 e^{-\theta y} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}[\varepsilon y\, g(y) f(y,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] \right\} dy$$

Diketahui $\frac{\partial}{\partial t}\phi(\theta,t) = \int_0^1 e^{-\theta y}\left[\frac{\partial f(y,t)}{\partial t}\right] dy$ sehingga

$$\int_0^1 e^{-\theta y}\left[\frac{\partial f(y,t)}{\partial t}\right] dy = \int_0^1 e^{-\theta y} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}[\varepsilon y\, g(y) f(y,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] \right\} dy$$

atau

$$\int_0^1 e^{-\theta y} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(y,t) + \frac{\partial}{\partial y}[\varepsilon y\, g(y) f(y,t)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] \right\} dy = 0.$$

Ini dipenuhi untuk semua bilangan real $\theta > 0$, oleh karena itu :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y,t) + \frac{\partial}{\partial y}[\varepsilon y\, g(y) f(y,t)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y,t) f(y,t)] = 0$$

sehingga

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y,t) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon y\, g(y) f(y,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\sigma^2(y,t) f(y,t)\right], \tag{11}$$

yang mempunyai syarat awal $\sigma(y - y_o) = f(y,t_o)$, σ disebut fungsi *Dirac*. Dengan demikian terbukti $\{Y(t),\ t > 0)$ proses difusi dengan ruas state $[0,1]$ dan mempunyai koefisien difusi $\varepsilon y g(y)$ dan $\sigma^2(y,t)$.

X. KESIMPULAN

Populasi dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti lingkungan dan makanan. Dalam perkembangbiakannya perlu waktu. Pertumbuhan populasi merupakan proses stokastik da proses markav sehingga model pertumbuhannya dapat diasumsikan sebagai model stokastik. Dengan menggunakan momen pertama dan kedua pada hukum peluang dan dihubungakan dengan definisi proses difusi maka diperoleh suatu persamaan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan (11) diatas adalah bentuk persaman diferensial parsial yang mempunyai koefisien, koefisiennya dinamakan koefisien difusi pada masalah pertumbuhan populasi. Persamaan (11) dinamakan juga persamaan Kolmogorov pada pertumbuhan populasi.

XI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini bisa terlaksana berkat bantuan dari **Dana Rutin Universitas Andalas Tahun 2006.** Untuk itu ucapan terima kasih diaturkan kepada Lembaga Penelitian Universitas Andalas yang telah memberikan bantuan dana tersebut kepada peneliti. Seterusnya ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang tidak mungkin disebutkan satu persatu namanya dalam laporan ini, yang telah membantu proses penelitian mulai dari pengumpulan bahan hingga penulisan laporan akhir.

XII. DAFTAR PUSTAKA

Haberman, R.,1977, Mathematical Models (An Introduction to Applied Mathematics), Prentice Hall Inc Englewood, New Jersey

Kapur, J. N., 2000, Mathematical Models in Biology and Medicine, Affiliceted East West Press Private Lmt., New Delhi

Osaki, S., 1992, Applied Stochastic System Modeling, Springer-Verlag.,Germany

Parzen, E., 1962, Stochastic Processes, Holden-day.Inc., San Fransisco

Tan, W.T., 2002, Stochastic Models with Applications to Genetics, Cancer, AIDS and Other Biomedical Systems, World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., Singapore