PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL DENGAN MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR

TESIS

Oleh:
NOVTI DEWITA
O6 215 105

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG

2008

PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL DENGAN MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR

Oleh: Novti Dewita

(Dibawah bimbingan Dr. Muhafzan, MSi dan Haripamyu, M.Si)

RINGKASAN

Sistem persamaan linier berbentuk

$$A\,\mathbf{x} = b \qquad (1.1.1)$$

dengan $A \in R^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in R^n$ riil dan $b \in R^m$ riil.

Meskipun $m > n$ atau $n > m$, sistem persamaan linier (1.1.1) masih mempunyai solusi tunggal alamiah (*natural unique solution*), yaitu solusi kuadrat terkecil (Hager, 1988). Penyelesaian kuadrat terkecil adalah penyelesaian dari masalah kuadrat terkecil, yaitu menentukan vektor **x** sedemikian sehingga A**x** sangat dekat dengan b. Dengan kata lain solusi kuadrat terkecil untuk masalah (1.1.1) adalah mencari vektor **x** sedemikian sehingga A**x**- b sekecil mungkin, atau ekivalen dengan penyelesaian masalah

$$\underset{x}{\text{minimum}} \; \|A\,\mathbf{x} - b\|_2 \, . \qquad (1.1.2)$$

dengan $\| . \|_2$ menyatakan norm Frobenius.

Tujuan penelitian adalah menentukan bagaimana penyelesaian masalah kuadrat terkecil dengan menggunakan dekomposisi nilai singular.

Masalah kuadrat terkecil dapat diselesaikan dengan menggunakan dekomposisi nilai singular dengan teori pendukung; teori dasar matriks , sistem persamaan linier, ruang perkalian dalam, norm matriks, ortogonalitas, ortonormal, nilai eigen dan vektor eigen, nilai singular dan vektor singular.

Langkah-langkah penyelesaian masalah kuadrat terkecil dengan menggunakan dekomposisi nilai singular adalah sebagai berikut:

1. Tentukan dekomposisi nilai singular $A = U S V^T$.
2. Hitung $b' = U^T b$.
3. Hitung y dengan $y_i = \frac{b'_i}{\delta_i}$ untuk $1 \leq i \leq k$, $y_i = 0$ selainnya.
4. hitung $\mathbf{x}_0 = Vy$.
5. $\mathbf{x}_0$ adalah penyelesaian masalah kuadrat terkecil.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Diberikan suatu sistem persamaan linier berbentuk

$$A\mathbf{x} = b \tag{1.1.1}$$

dengan $A \in R^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in R^n$ riil dan $b \in R^m$ riil. Telah diketahui bahwa jika $A \in R^{m \times n}$ non singular maka solusi sistem (1.1.1) adalah tunggal (Anton, 1988). Jika $A \in R^{m \times n}$ dengan $m \neq n$, dan $m > n$, yakni jumlah persamaan lebih banyak dari jumlah variabel maka sistem (1.1.1) biasanya tidak punya solusi. Sebaliknya jika $n > m$, yakni jumlah persamaan lebih sedikit dari jumlah variabel, maka sistem (1.1.1) mempunyai tak berhingga banyaknya solusi (Leon, 2001).

Sistem persamaan linier yang tidak punya solusi dan punya banyak solusi penting dalam berbagai aplikasi di bidang fisika dan teknik. Sangat umum dijumpai sebuah situasi dimana beberapa permasalahan fisika menghasilkan sebuah sistem persamaan (1.1.1), yang seharusnya konsisten dalam tatanan teoritis namun menjadi tidak demikian karena adanya kesalahan pengukuran pada entri-entri A dan b yang mengubah sistem sedemikian rupa sehingga menimbulkan ketidakkonsistenan. Dalam situasi semacam ini diusahakan mencari nilai **x** yang sedekat mungkin dengan penyelesaian yang diharapkan. (Anton-Rorres,2004).

Meskipun $m > n$ atau $n > m$, sistem persamaan linier (1.1.1) masih mempunyai solusi tunggal alamiah (*natural unique solution*), yaitu solusi kuadrat terkecil (Hager, 1988). Penyelesaian kuadrat terkecil adalah penyelesaian dari masalah kuadrat terkecil, yaitu menentukan vektor **x** sedemikian sehingga A**x** sangat dekat dengan b. Dengan kata lain solusi kuadrat terkecil untuk masalah (1.1.1) adalah mencari vektor **x** sedemikian sehingga Ax- b sekecil mungkin, atau ekivalen dengan penyelesaian masalah

$$\underset{x}{\text{minimum}} \ \|A\,\mathbf{x} - b\|_2 \qquad (1.1.2)$$

dengan $\|\cdot\|_2$ menyatakan norm Frobenius

Berbagai metode tersedia untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil tersebut, untuk jelasnya dapat dilihat dalam Noble dan Daniel, (1988). Dalam penelitian ini akan didiskusikan penyelesaian masalah kuadrat terkecil menggunakan metode dekomposisi nilai singular. Metode ini merupakan suatu metode alternatif untuk penyelesaian masalah kuadrat terkecil.

1.2. Perumusan Masalah

Diberikan sistem persamaan linier (1.1.1), dengan $A \in R^{m \times n}, m > n$. Bagaimana mencari vektor $\mathbf{x} \in R^{m \times n}$ yang memenuhi

$$\underset{x}{\text{minimum}} \ \|A\mathbf{x} - b\|_2$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi nilai singular.

1.3. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan untuk menambah wawasan tentang cara menyelesaikan masalah kuadrat terkecil khususnya dengan menggunakan metode dekomposisi nilai singular.

1.4 .Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bagaimana penyelesaian masalah kuadrat terkecil dengan menggunakan metode dekomposisi nilai singular.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Suatu sistem persamaan linier berbentuk

$$A\,\mathbf{x} = b \qquad (1.1.1),$$

dengan $A \in R^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in R^{n}$ riil dan $b \in R^{m}$ riil. Telah diketahui bahwa jika $A \in R^{n\times n}$ non singular maka solusi sistem (1.1.1) adalah tunggal (Anton, 1988). Jika $A \in R^{m\times n}$ dengan $m \neq n$, dan $m > n$, yakni jumlah persamaan lebih banyak dari jumlah variabel maka sistem (1.1.1) biasanya tidak punya solusi. Sebaliknya jika $n > m$, yakni jumlah persamaan lebih sedikit dari jumlah variabel, maka sistem (1.1.1) mempunyai tak berhingga banyaknya solusi.

Meskipun $m > n$ atau $n > m$ sistem persamaan linier (1.1.1) masih mempunyai solusi tunggal alamiah (*natural unique solution*), yaitu solusi kuadrat terkecil. Penyelesaian kuadrat terkecil adalah penyelesaian dari masalah kuadrat terkecil, yaitu menentukan vektor **x** sedemikian sehingga A**x** sangat dekat dengan b. Dengan kata lain solusi kuadrat terkecil untuk masalah (1.1.1) adalah mencari vektor **x** sedemikian sehingga A**x** - b sekecil mungkin, atau ekivalen dengan penyelesaian masalah.

$$\underset{x}{\text{minimum}}\ \|A\,\mathbf{x} - b\|_2$$

dengan $\|.\|_2$ menyatakan norm Frobenius.

Penyelesaian masalah kuadrat terkecil dapat menggunakan metode dekomposisi nilai singular dimana merupakan suatu metode alternatif. Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil adalah sebagai berikut;

1. Tentukan dekomposisi nilai singular $A = U\,S\,V^{T}$

2. Hitung $b' = U^T b$

3. Hitung y dengan $y_i = \frac{b'_i}{\sigma_i}$ untuk $1 \le i \le k$, $y_i = 0$ selainnya

4. hitung $\mathbf{x}_0 = Vy$

5. $\mathbf{x}_0$ adalah penyelesaian masalah kuadrat terkecil dan diantara semua penyelesaian, $\mathbf{x}_0$ mempunyai norm -2 terkecil.

5. 2. Saran-Saran

Pada penelitian ini penulis hanya membahas penyelesaian kuadrat terkecil pada sistem persamaan berbentuk

$$A\,\mathbf{x} = b$$

Diharapkan peneliti lain dapat membahas penyelesaian kuadrat terkecil pada bentuk persamaan lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1988. Aljabar Linier. Erlangga . Bandung

Anton, H dan Rorres,C. 2004. Aljabar Linier Elementer. Erlangga. Jakarta

Arifin. A. 2001 Aljabar Linier. ITB. Banding

Jacob. B. 1990. Liner Algebra. W. H Freeman and Company. New York

Goldberg, J.L. 1991. Matrix Theory with Aplications. Mc Graw - Hill Inc. U.S.A

Golub, G. H. 1983. Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press U.S.A

Hadley G. 1983. Aljabar Linier. Erlangga. Jakarta

Hager ,W. W . 1988. Applied Numerical Linear Algebra. Prentice -Hall . U. S. A

Lay, D.C. 2003 Linear Algebra. University of Maryland-College Park. U. S. A

Leon, S. J. 2001. Aljabar Linear dan Aplikasinya . Erlangga. Jakarta

Noble, B and Daniel , J. W . 1988. Applied Linear Algebra. Prentice -Hall U. S. A.

Strang, G. 1993. Introduction to linear Algebra. Wellesley-Cambridge Press U. S. A

MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS A[illegible]