TEOREMA DARBOUX'S SEBAGAI SIFAT NILAI TENGAH DARI TURUNAN FUNGSI

TESIS

Oleh:

SAFRIZAL

06215019

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Teorema Darboux's sebagai sifat nilai tengah dari turunan fungsi

Oleh: Safrizal
(Di bawah bimbingan I Made Arnawa dan Haripamyu)

RINGKASAN

Turunan fungsi merupakan bagian kalkulus yang sangat berperan dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Dalam prakteknya peranan turunan fungsi yang sering digunakan adalah masalah nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi pada suatu interval tertentu. Dengan turunan dapat ditentukan perubahan kemonotonan di sekitar titik c yang termuat dalam I, sebagai konsekuensinya menghasilkan nilai ekstrim relatif di titik c tersebut. Akibat dari pengertian ini, jika turunan fungsi f tersebut ada pada titik tersebut, maka $f'(c)=0$. Selanjutnya berdasarkan Teorema Rolle's, jika f adalah kontinu pada interval tutup $[a,b]$ dan nilai turunan fungsi f ada untuk setiap titik pada interval buka (a,b) dengan $f(a)=f(b)=0$, maka paling sedikit ada satu titik $c\in(a,b)$ sedemikian sehingga $f'(c)=0$. Kemudian dalam Teorema Nilai Tengah Bolzano's menyatakan bahwa, jika $f:I\to\Re$ fungsi kontinu pada suatu interval tutup $[a,b]$ dan $k\in\Re$ memenuhi $f(a)<k<f(b)$, maka ada sebuah titik $c\in I$ antara a dan b sedemikian sehingga $f(c)=k$. Berdasarkan teorema ini, range f merupakan suatu interval di $\Re$. Oleh karena itu, sifat ini diyakini ekivalen dengan sifat kekontinuan fungsi.

Teorema tersebut memunculkan pengertian teorema nilai tengah pada suatu turunan fungsi, sebab turunan fungsi pada suatu interval merupakan suatu

fungsi. Hal ini sesuai dengan pendapat Gaston Darbaux pada tahun 1875 yang menyatakan bahwa setiap turunan fungsi pada suatu interval I memiliki nilai antara, walaupun fungsi turunan itu tidak kontinu. Seperti yang dinyatakannya dalam Teorema Darboux's, *jika f diferensiabel pada* $I = [a,b]$ *dan k adalah suatu bilangan antara* $f'(a)$ *dan* $f'(b)$, *maka terdapat paling sedikit sebuah titik* $c \in (a,b)$ *sedemikian sehingga* $f'(c) = k$.

Penelitian ini dititikberatkan pada pengkajian sifat nilai tengah dari turunan fungsi pada suatu interval tutup $[a,b]$. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan menambah khasanah ilmu tentang teori turunan fungsi, khususnya mengenai Teorema Darboux's sebagai sifat nilai tengah dari turunan fungsi.

Penelitian ini dilaksanakan di perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang sejak bulan mei 2007 sampai dengan maret 2008 dengan metode studi literatur, yaitu mengumpulkan literatur yang relevan sebagai sumber utama. Selanjutnya, penulis mempelajarinya dengan mengurutkan, mengklasifikasikan, mengelompokkan, menganalis dan mereduksinya kedalam bentuk Teorema Darboux serta membuktikannya. Pada tahap ini diberikan pembahasan dan contoh-contoh tentang pengunanaan konsep dan aplikasinya terhadap turunan fungsi dalam interval tersebut. Kemudian dianalisis dan ditarik kesimpulan bahwa Teorema Darboux merupakan sifat nilai tengah dari turunan fungsi tersebut.

Teorema Nilai Tengah Bolzano's menyebutkan bahwa, misalkan I adalah suatu interval dan $f : I \to \Re$ adalah suatu fungsi kontinu pada suatu interval I. Jika $a,b \in I$ dan jika $k \in \Re$ memenuhi $f(a) < k < f(b)$, maka ada sebuah titik

$c \in I$ antara a dan b sedemikian hingga $f(c) = k$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan mengambil kasus pada interval tersebut dengan $a < b$ dan dengan memisalkan suatu bentuk fungsi $g(x) = f(x) - k$. Dengan mengambil pemisalan fungsi tersebut, maka akan berakibat $g(a) < 0 < g(b)$. Berdasarkan Teorema Lokalisi Akar-akar dari suatu fungsi, akan terdapat sebuah titik c dengan $a < c < b$ sehingga berlaku $0 = f(c) - k$. Akibatnya $f(c) = k$. Jika diambil suatu kasus $b < a$ pada interval tersebut, maka dapat misalkan suatu bentuk fungsi $h(x) = k - f(x)$ sedemikian sehingga $h(b) < 0 < h(a)$. Oleh karena itu akan terdapat sebuah titik c dengan $b < c < a$ sehingga berlaku $0 = h(c) = k - f(c)$. Akibatnya $f(c) = k$.

Akibat dari teorema tersebut muncul suatu pengertian yang menyatakan sifat nilai tengah dari turunan suatu fungsi, yang selanjutnya disebut dengan Teorema Darboux's. Namun pembentukan teorema ini didasarkan pada analogi pembentukan Teorema Bolzano's. Oleh sebab itu dapat disimpulkan suatu pengertian dari Teorema Darboux's yang menyatakan bahwa jika sebuah fungsi f diferensiabel pada setiap titik pada suatu interval I, maka turunan fungsi f atau fungsi f' akan mempunyai suatu sifat nilai tengah. Hal ini merupakan salah satu akibat langsung dari sifat kekontinuan dalam pernyataan Teorema Bolzano's. Akan tetapi dalam pernyataan Teorema Darboux's nilai tengah untuk turunan fungsi tersebut pada suatu interval tidak perlu fungsi yang kontinu.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu konsep dasar dalam mempelajari kalkulus adalah hal yang berkaitan dengan konsep turunan. Turunan fungsi merupakan bagian kalkulus yang sangat berperan dalam perkembangan ilmu pengetahuan seperti ilmu ekonomi, ilmu fisika, maupun dalam matematika itu sendiri. Dalam prakteknya peranan turunan fungsi yang sering digunakan adalah masalah nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi pada suatu interval tertentu.

Untuk fungsi kontinu pada interval I, perubahan kemonotonan di sekitar titik c yang termuat dalam I akan menghasilkan nilai maksimum relatif atau nilai minimum relatif. Suatu fungsi $f : I \to \Re$ dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif (atau minimum relatif) pada $c \in I$ jika ada lingkungan $V = V_\delta(c)$ dari c sedemikian sehingga $f(x) \leq f(c)$ (atau $f(c) \leq f(x)$) untuk setiap x pada $V \cap I$. Dengan kata lain bahwa fungsi f mempunyai nilai ekstrim relatif pada $c \in I$ jika fungsi tersebut pada titik c mencapai nilai minimum relatif atau maksimum relatif. Akibat dari pengertian ini, maka berdasarkan Teorema Nilai Ekstrim, jika c adalah titik interior dari suatu interval I pada suatu fungsi $f : I \to \Re$ yang mempunyai sebuah nilai ekstrim relatif dan turunan fungsi f tersebut ada pada titik tersebut, maka $f'(c) = 0$. Oleh karena itu jika fungsi $f : I \to \Re$ adalah kontinu pada suatu interval I dan mempunyai sebuah nilai ekstrim relatif pada titik interior c dari I, maka berlaku juga bahwa nilai turunan fungsi pada c tidak ada atau sama dengan nol. Selanjutnya berdasarkan Teorema Rolle's disebutkan, misalkan bahwa f adalah kontinu pada interval tutup $[a,b]$ dan nilai turunan fungsi f ada untuk setiap titik pada interval buka (a,b) dengan $f(a) = f(b) = 0$, maka paling sedikit ada satu titik $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f^{'}(c) = 0$.

Dalam Teorema Nilai Tengah Bolzano's menyatakan bahwa, misalkan I adalah suatu interval dan $f : I \to \Re$ adalah suatu fungsi kontinu pada suatu interval I. Jika a, $b \in I$ dan jika $k \in \Re$ memenuhi $f(a) < k < f(b)$, maka ada sebuah titik $c \in I$ antara a dan b sedemikian hingga $f(c) = k$ (Lewin, 1993). Akibat dari teorema ini, jika f kontinu pada interval I maka range f merupakan suatu interval di $\Re$. Oleh karena itu, sifat ini diyakini oleh sebagian ahli matematika abad ke-19 ekivalen dengan sifat kekontinuan fungsi (Bruckner, 1994).

Teorema tersebut memunculkan pengertian teorema nilai antara pada suatu turunan fungsi, sebab turunan fungsi pada suatu interval merupakan suatu fungsi. Hal ini sesuai dengan pendapat Gaston Darbaux pada tahun 1875 yang menyatakan bahwa setiap turunan fungsi pada suatu interval I memiliki nilai antara, walaupun fungsi turunan itu tidak kontinu (Bruckner, 1994). Seperti yang dinyatakannya dalam sebuah teorema yang dikenal sebagai Teorema Darboux's menyebutkan bahwa, *jika f diferensiabel pada $I = [a,b]$ dan k adalah suatu bilangan antara $f^{'}(a)$ dan $f^{'}(b)$, maka terdapat paling sedikit sebuah titik $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f^{'}(c) = k$.* Karena dedikasi Darboux pada subjek ini, maka Bruckner (1994) menyatakan bahwa suatu fungsi yang memiliki nilai antara dinyatakan sebagai fungsi Darboux.

1.2 Perumusan Masalah

Seperti yang dijelaskan pada latar belakang, penelitian ini dititikberatkan pada pengkajian sifat nilai tengah dari turunan fungsi pada suatu interval tutup dan terbatas $[a,b]$. Agar penelitian ini terarah dengan baik maka penulis merumuskan masalah sebagai berikut:

"Bagaimana sifat nilai tengah dari turunan fungsi pada interval tutup dan terbatas [a, b]?"

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan untuk menambah khasanah ilmu tentang teori turunan fungsi, khususnya mengenai Teorema Darboux's sebagai sifat nilai tengah dari turunan fungsi.

1.4 Tujuan Penelitian

Pada dasarnya penelitian ini bertujuan untuk mempelajari sifat nilai tengah dari turunan fungsi pada suatu interval tutup dan terbatas $[a,b]$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari berbagai uraian diatas dapat disimpulkan suatu pengertian dari Teorema Darboux's yang menyatakan bahwa jika sebuah fungsi f diferensiabel pada setiap titik pada suatu interval I, maka turunan fungsi f atau fungsi f' akan mempunyai suatu sifat nilai tengah, hal ini berarti bahwa jika f' mempunyai nilai A dan B, maka nilai turunan dari fungsi tersebut juga akan mempunyai nilai atau terletak pada setiap nilai diantara A dan B. Hal ini merupakan salah satu akibat langsung dari sifat kekontinuan dalam pernyataan Teorema Bolzano's. Akan tetapi dalam pernyataan Teorema Darboux's nilai antara untuk turunan fungsi tersebut pada suatu interval tidak perlu fungsinya kontinu, yaitu fungsi yang tidak kontinu pada suatu interval juga mempunyai sifat nilai antara atau nilai tengah.

5.2 Saran

Adapun saran yang dapat disampaikan pada penelitian ini:

1. Perlu dilakukan kajian dan analisis lebih lanjut tentang sifat nilai tengah dari suatu fungsi yang tidak kontinu.
2. Perlu dicari lagi suatu batasan yang lebih akurat sehingga sifat nilai tengah berlaku secara umum baik untuk fungsi kontinu maupun untuk fungsi tidak kontinu.

DAFTAR PUSTAKA

Bruckner, A. 1994. *Differentiation of Real Functions*. American Mathematical Society, USA

Bartle, R. 1976. *The Elements of Real Analysis*. 2nd edition, Jhon Wiley & Sons, Inc. New York

_______ dan Sherbert,D. 1994. *Introduction to Real Analysis*, 2nd edition, Jhon Wiley & Sons, Inc

Golberg, R. 1976. *Methods of Real Analysis*. Jhon Wiley & Sons, Inc

Lewin, J dan Lewin, M. 1993. *An Introduction to Matematical Analysis*. 2nd edition. McGraw-Hill, Inc. New York

Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Erlangga. Jakarta

Purcell, E. 2004. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jilid 1. Edisi kedelapan. Erlangga. Jakarta.