

**PERBEDAAN RUANG VEKTOR  $C^2$  ATAS  $\mathbb{R}$  DENGAN  
RUANG VEKTOR  $C^2$  ATAS  $\mathbb{C}$ .**

**T E S I S**

**Oleh :**

**KWINTA MARHERINA**

**06215136**



**PROGRAM PASCASARJANA  
UNIVERSITAS ANDALAS  
2008**

# Perbedaan Ruang Vektor $C^2$ Atas $R$ Dengan Ruang Vector $C^2$ Atas $C$

Oleh : Kwinta Marherina

(dibawah bimbingan Dr. I Made Arnawa, M. Si dan Zulakmal, M. Si)

## RINGKASAN

Ruang vektor dimana skalar-skalarnya merupakan bilangan real disebut ruang vektor real, sedangkan ruang vektor dimana skalar-skalarnya bilangan kompleks disebut ruang vektor kompleks. Kombinasi linier dari ruang-ruang vektor, yang berada didalam sebuah ruang vektor kompleks didefinisikan secara tepat sebagaimana halnya vektor-vektor yang berada dalam ruang vektor real, hanya saja skalar-skalarnya dapat berupa bilangan-bilangan kompleks. Begitu juga dengan basis dan dimensi pada ruang vektor real dapat diterapkan pada ruang vektor kompleks. Dan teorema-teorema yang berlaku pada ruang vektor  $V$  atas  $R$  juga berlaku pada ruang vektor atas  $C$ .

Tujuan penelitian ini adalah untuk memperlihatkan perbedaan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$ . Penelitian ini dilakukan dari bulan Juli 2008 – Oktober 2008 di Padang.

Di dalam penelitian ini akan dibahas perbedaan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$ .

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan perbedaan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  adalah yaitu :

MILIK  
UPT PERPUSTAKAAN  
UNIVERSITAS ANDALAS

### 1. Ruang Vektor $C$ atas $R$

Misalkan  $C = \{(x + yi) \mid x, y \in R\}$ . Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada  $C$  didefinisikan sebagai berikut:

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$r(x_1 + y_1i) = (rx_1 + ry_1i)$$

untuk suatu  $x_1, x_2, y_1, y_2, r \in R$

Akan ditunjukkan "+" dan "." memenuhi sifat-sifat di ruang vektor.

### 2. Ruang Vektor $C$ atas $C$

Misalkan  $C = \{(x + yi) \mid x, y \in R\}$ . Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada  $C$  didefinisikan sebagai berikut:

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i)$$

$$r(x_1 + y_1i) = (rx_1 + ry_1i)$$

untuk suatu  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$  dan  $r \in C$

$C$  adalah ruang vektor atas lapangan  $C$

Akan ditunjukkan "+" dan "." memenuhi sifat-sifat di ruang vektor.

### 3. Ruang Vektor $C^2$ atas $R$

$C^2 = \{(x, y) \mid x, y \in C\}$ . Akan ditunjukkan  $C^2$  merupakan ruang vektor atas  $R$ . Ambil  $u, v, w \in C^2$  dan  $r \in R$

Maka  $u = (x_1, y_1)$ ,  $v = (x_2, y_2)$  dan  $w = (x_3, y_3)$

Dimana  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in C$

Definisikan operasi + dan . memenuhi sifat sebagai berikut :

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, (y_1 + y_2))$$

$$r(\mathbf{u}) = r(x_1, y_1) = rx_1, ry_1$$

Akan ditunjukkan "+" dan "." memenuhi sifat diruang vektor.

#### 4. Ruang Vektor $C^2$ atas $C$

$C^2 = \{(x,y) \mid x, y \in C\}$  Akan ditunjukkan  $C^2$  merupakan ruang vektor

atas  $C$ . Ambil  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in C^2$  dan  $r \in C$ . Maka  $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$  dan

$$\mathbf{w} = (x_3, y_3)$$

Dimana  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in C$

Defenisikan operasi + dan . memenuhi sifat sebagai berikut :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2), (y_1 + y_2)$$

$$r(\mathbf{u}) = r(x_1, y_1) = rx_1, ry_1$$

Akan ditunjukkan "+" dan "." memenuhi sifat diruang vektor.

Dari hasil pembahasan yang dilakukan terlihat bahwa perbedaan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  terletak pada skalar dan banyak dimensi dari ruang vektor tersebut.

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa :

1. Semua aturan-aturan dan teorema yang berlaku pada ruang vektor real juga berlaku pada ruang vektor kompleks.
2. Perbedaan jelas terlihat pada basis dimana skalar pada ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  berupa bilangan real, sedangkan pada ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  akan berupa bilangan kompleks.
3. Dari basis juga dapat diperlihatkan bahwa dimensi ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  ada 4 sedangkan dimensi ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  ada 2.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam banyak aplikasi penggunaan vektor, seringkali diperlukan untuk memiliki komponen-komponen skalar yang berupa bilangan kompleks. Ruang vektor dimana skalar-skalanya merupakan bilangan real disebut ruang vektor real. Sedangkan ruang vektor dimana skalar-skalanya merupakan bilangan kompleks disebut ruang vektor kompleks.

Kombinasi linier dari vektor-vektor yang berada di dalam sebuah ruang vektor kompleks didefinisikan secara tepat sebagaimana halnya vektor-vektor yang berada di dalam ruang vektor real, hanya saja skalar-skalanya dapat berupa bilangan-bilangan kompleks. Secara spesifik, sebuah vektor  $w$  disebut sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , jika  $w$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r,$$

dimana  $k_1, k_2, \dots, k_r$  adalah bilangan-bilangan kompleks. Basis dan dimensi pada ruang vektor real dapat diterapkan pada ruang vektor kompleks tanpa perubahan apapun, dan teorema-teorema yang berlaku pada ruang vektor  $V$  atas  $R$  juga berlaku pada ruang vektor atas  $C$ .

Diantara semua ruang vektor kompleks, yang terpenting adalah  $C^n$ , ruang  $n$ -tupel yang terdiri dari bilangan-bilangan kompleks, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dilakukan antara koordinat-koordinat yang bersesuaian.

Pada tesis ini akan dibahas perbedaan antara ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas, masalah yang akan dibahas adalah perbedaan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$ .

## 1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan akan memberikan manfaat pada perkembangan ilmu pengetahuan dan untuk menambah khasanah ilmu tentang ruang vektor kompleks dan bisa membedakan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$ . Juga diharapkan akan bermanfaat bagi para pembaca dan terutama bagi penulis sendiri.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membedakan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$ .

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Dari uraian pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa perbedaan ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  dengan ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  terletak pada basis. Dimana skalar pada ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  adalah bilangan real sedangkan skalar pada ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  adalah bilangan kompleks. Perbedaan juga dapat dilihat pada dimensi dari ruang vektor tersebut. Dimana dimensi ruang vektor  $C^2$  atas  $R$  ada 4 sedangkan dimensi ruang vektor  $C^2$  atas  $C$  ada 2.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. 1988. *Aljabar Linier Elements*. Jakarta: Erlangga.
- Arifin, Achmad. 2001. *Aljabar Linier*, ed.2. ITB, Bandung.
- Anton & Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer Jilid I*. Jakarta: Erlangga.
- Anton & Rorres. 2005. *Aljabar Linier Elementer Jilid II*. Jakarta: Erlangga.
- Curtis, Morton L. 1990. *Abstract Linear Algebra*. Springer-Verlag, New York.
- Jacob, Bill. , 1990. *Linear Algebra*. W. H Freeman and Company, New York.
- Spiegel, M. 1987. *Teori & Soal-soal Peubah Kompleks*. Jakarta: Erlangga.