BASIS RUANG HASIL KALI DALAM

T E S I S

Oleh:

ZELFIDA

06215132

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

BASIS RUANG HASIL KALI DALAM

Oleh: Zelfida
(Di bawah bimbingan Dr. I Made Arnawa, M. Si dan Zulakmal, M. Si)

RINGKASAN

Dalam sejumlah permasalahan yang melibatkan ruang vektor, untuk menyelesaikannya kita bebas memilih basis sebarang untuk ruang vektor tersebut yang kita anggap sesuai. Di dalam ruang hasil kali dalam, solusi dari sebuah soal seringkali bisa jauh lebih disederhanakan dengan cara memilih sebuah basis dimana vektor-vektor menjadi saling ortogonal satu sama lainnya. Salah satu contohnya adalah menentukan basis ortonormal dengan menggunakan proses Gram-Schmidt.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan basis ruang hasil kali dalam. Penelitian ini dilakukan dari bulan Agustus sampai Oktober 2008, di Payakumbuh dan Padang. Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur yang membahas tentang basis ruang hasil kali dalam dengan proses Gram-Schmidt.

Suatu himpunan vektor-vektor di dalam sebuah di dalam ruang hasil kali dalam disebut sebagai himpunan ortogonal (*orthogonal set*) jika setiap pasangan vektor yang berbeda di dalam himpunan tersebut adalah ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal yang vektor-vektornya memiliki norma 1 disebut ortonormal.

Proses mengalikan sebuah vektor tak nol V dengan nilai resisprok (kebalikan) dari panjangnya untuk memperoleh sebuah vektor dengan norma 1 disebut sebagai menormalisasikan V (*normalizing V*). Sebuah himpunan ortogonal

yang terdiri dari vektor-vektor tak nol akan selalu dapat dikonversikan menjadi sebuah himpunan ortonormal dengan cara menormalisasikan setiap vektornya.

Proses Gram-Schmidt adalah suatu proses yang disusun untuk mengkonversikan suatu basis sebarang menjadi sebuah basis ortogonal, kemudian setelah seluruh basis ortogonal diperoleh kita menormalisasikannya untuk memperoleh sebuah basis ortonormal. misalkan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis sebarang untuk V cukup kiranya kita menunjukkan bahwa V memiliki sebuah basis ortogonal, karena vektor-vektor di dalam basis ortogonal itu dapat dinormalisasikan untuk menghasilkan sebuah basis ortonormal untuk V. Urutan langkah-langkah berikut ini akan menghasilkan basis ortonormal untuk $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ untuk ruang vektor V:

Langkah 1: $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Vektor v_1 mempunyai norma 1

Langkah 2: $v_2 = \dfrac{u_2 - proy_{w1} u_2}{\|u_2 - proy_{w1} u_2\|}$

$$= \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$$

Langkah 3: $v_3 = \dfrac{u_3 - proy_{w2} u_3}{\|u_3 - proy_{w2} u_3\|}$

$$= \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|}$$

Langkah 4: $v_4 = \dfrac{u_4 - proy_{w3} u_4}{\|u_4 - proy_{w3} u_4\|}$

$$= \frac{u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3}{\|u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3\|}$$

Pembentukan langkah demi langkah di atas untuk mengubah sebarang basis ke basis ortonormal dinamakan ***proses Gram-Schmidt***. Hal ini diperlihatkan bahwa pada masing-masing tahapan proses ini, vektor-vektor v_1, v_2, ..., v_k membentuk basis ortonormal untuk subruang yang direntang oleh u_1, u_2, ..., u_k.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Aljabar linear merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang aplikasinya banyak dipakai di berbagai ilmu terapan. Matriks dan vektor merupakan bagian dari aljabar linear.

Dalam sejumlah permasalahan yang melibatkan ruang vektor, untuk menyelesaikannya kita bebas memilih basis sebarang untuk ruang vektor tersebut yang kita anggap sesuai. Di dalam ruang hasil kali dalam, solusi dari sebuah soal seringkali bisa jauh lebih disederhanakan dengan cara memilih sebuah basis dimana vektor-vektor menjadi saling ortogonal satu sama lainnya. Salah satu contohnya adalah menentukan basis ortonormal dengan menggunakan proses Gram-Schmidt. Untuk itu, perhatikan langkah-langkah berikut:

Misalkan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ basis dari ruang hasil kali dalam V, kita dapat menggunakan basis ini untuk membentuk basis ortogonal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dari V sebagai berikut:

Tetapkan:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}.v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}.v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}.v_2$$

$$v_n = u_n - \frac{\langle u_n, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}.v_1 - \frac{\langle u_n, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}.v_2 - \ldots - \frac{\langle u_n, v_{n-1} \rangle}{\|v_{n-1}\|^2}.v_{n-1}$$

Setelah langkah ke-n kita akan memperoleh himpunan vektor-vektor ortogonal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Langkah ini dikenal sebagai proses Gram-Schmidt. Karena V berdimensi n dan setiap himpunan ortogonal bersifat bebas linier maka himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah sebuah basis ortogonal bagi V (Anton & Rorres, 2000). Pada tesis ini akan ditentukan basis ortonormal dari R^n.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka rumusan masalah pada pembahasan ini adalah bagaimana menentukan basis ruang hasil kali dalam dengan proses Gram-Schmidt.

1.3. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya dan menambah wawasan mengenai konsep basis ruang hasil kali dalam.

1.4. Tujuan penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan basis ruang hasil kali dalam.

BAB V

KESIMPULAN

Kesimpulan :

1. Suatu himpunan vektor-vektor di dalam sebuah di d[illegible] dalam disebut sebagai himpunan ortogonal *(orthogonal [illegible])* [illegible] pasangan vektor yang berbeda di dalam himpunan [illegible] ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal yang vektor-vektornya [illegible] norma 1 disebut ortonormal.
2. Proses mengalikan sebuah vektor tak nol V dengan nilai [illegible] (kebalikan) dari panjangnya untuk memperoleh sebuah vektor dengan norma 1 disebut sebagai menormalisasikan V (*normalizing* V). Sebuah himpunan ortogonal yang terdiri dari vektor-vektor tak nol akan selalu dapat dikonversikan menjadi sebuah himpunan ortonormal dengan cara menormalisasikan setiap vektornya.
3. Proses Gram-Schmidt adalah suatu proses yang disusun untuk mengkonversikan suatu basis sebarang menjadi sebuah basis ortogonal. kemudian setelah seluruh basis ortogonal diperoleh kita menormalisasikannya untuk memperoleh sebuah basis ortonormal.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Anton, H. 1990. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ketiga. Jakarta: Erlangga.

Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Arifin, A. 1985. *Aljabar Linier*. Edisi Pertama. ITB: Bandung.

Arnawa, I. M. dan Nita, S. 2002. *Vektor Karakteristik Diperumum pada Operator Normal*. Unand, Padang.

Budhi, WS. 1995. *Aljabar Linier*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Gusdani, 2002. *Operator yang Dapat Didiagonalkan*. Skripsi Sarjana Matematika FMIPA UNAND Padang.

Hoofman, K. and Kunze, R. 1971. *Linier Algebra*. 2nd ed. Prentice-Hall, Inc. New Delhi.

Jacob, B. 1990. *Linier Algebra*. New York: W.h Freeman and Company.

Khanna, Vijay K. 1993. *A Course in Abstarct Algebra*. New Delhi: Vikas Publishing House PVTLTD.

Lay, David C. *Linier Algebra and Its Applications*, 3rd ed. University of Maryland-College Park. New York.