

**PEMANGKATAN MATRIKS DENGAN MENGGUNAKAN
MATRIKS DIAGONAL**

TESIS

**Oleh :
YUSMANIZAR
06215050**



**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008**

Pemangkatan matriks dengan menggunakan matriks diagonal

Oleh : Yusmanizar

(Di bawah bimbingan Dr. I Made Arnawa, M.Si dan Nova Noliza bakar, M.Si)

RINGKASAN

Aljabar Linier merupakan salah satu cabang dari ilmu Matematika yang aplikasinya banyak dipakai diberbagai ilmu terapan. Matriks dan vektor merupakan bagian dari aljabar linier.

Pemangkatan pada matriks sering dilakukan dengan mengalikan matriks tersebut berulang-ulang, yaitu $A^k = A \times A \times \dots \times A$ dengan k adalah bilangan positif (Anton,1990). Dapat dibayangkan betapa sulitnya jika harus mengalikan matriks A berkali-kali jika ingin memangkatkan matriks A dengan suatu bilangan bulat yang cukup besar, apalagi jika matriks berukuran 3×3 atau lebih.

Dari permasalahan tersebut timbul suatu pertanyaan, adakah cara lain dapat digunakan agar pemangkatan matriks dengan suatu bilangan bulat yang cukup besar dapat dilakukan dengan lebih mudah dan lebih efisien.

Penelitian ini bertujuan untuk memudahkan dalam menghitung hasil pemangkatan matriks persegi terhadap suatu bilangan bulat positif yang cukup besar.

dimana elemen dari matriks P adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks A sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ sebuah matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonal matriks A (Anton.1990). Atau dapat dinyatakan sebagai $P^{-1}AP = D$ dengan D matriks diagonal, elemen dari matriks P adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks A . Karena P dapat dibalik maka:

$$P^{-1}AP = D$$

$$P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$$

$$(PP^{-1})A(PP^{-1}) = PDP^{-1}$$

$$IAI = PDP^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Sehingga untuk A^k dapat ditentukan dengan :

$$A^k = \underbrace{A A A \dots A}_{k\text{-faktor}}$$

$$= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{k\text{-faktor}}$$

$$= \underbrace{PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)DP}_{k\text{-faktor}}$$

$$= \underbrace{PD(I)D(I)D(I) \dots (I)DP^{-1}}_{k\text{-faktor}}$$

$$= \underbrace{P D D D \dots DP^{-1}}_{k\text{-faktor}}$$

$$= PD^k P^{-1}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Aljabar linier merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang aplikasinya banyak dipakai diberbagai ilmu terapan. Matriks dan vektor merupakan bagian dari aljabar linier.

Pada matriks sering ditemukan masalah dalam menghitung matriks A^k , yaitu $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k$, k adalah bilangan bulat positif (Anton,1990). Dapat dibayangkan betapa sulitnya jika harus mengalikan matriks A berkali-kali jika ingin memangkatkan matriks A dengan suatu bilangan asli yang cukup besar. Belum lagi jika matriks yang akan dipangkatkan itu adalah matriks dengan ukuran 3×3 atau lebih.

Untuk dapat memudahkan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut, dibutuhkan suatu formula yang lebih sederhana sehingga penyelesaiannya akan lebih efisien. Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah di atas adalah dengan diagonalisasi matriks, yaitu dengan mencari matriks diagonal dari matriks A sehingga didapat bentuk $A^k = PD^kP^{-1}$ dengan k bilangan bulat positif sebarang, D adalah matriks diagonal yang berisi nilai eigen dari matriks A dan matriks P adalah matriks singular tak nol yang didapat dari vektor eigen matriks A (Budhi,1995).

Dengan memakai formula di atas masalah mencari pangkat sebarang dari matriks berubah menjadi pangkat dari matriks diagonal.

1.2 Perumusan Masalah.

Dari latar belakang di atas, masalah yang akan dibahas adalah bagaimana cara menyatakan pemangkatan suatu matriks dalam bentuk matriks diagonal.

1.3 Manfaat Penelitian.

Penelitian ini diharapkan akan memberikan manfaat pada perkembangan ilmu pengetahuan dan untuk menambah khasanah ilmu tentang pemangkatan matriks persegi terhadap suatu bilangan bulat positif yang cukup besar. Juga diharapkan akan bermanfaat bagi para pembaca dan tentunya bagi penulis sendiri.

1.4 Tujuan Penelitian.

Penelitian ini bertujuan untuk memudahkan dalam menghitung hasil pemangkatan suatu matriks persegi terhadap suatu bilangan bulat positif yang cukup besar.

B A B V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan .

Dari penjabaran tesis diatas maka dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa, untuk menghitung pemangkatan suatu matriks, selain dengan mengalikan matriks tersebut berulang-ulang, dapat juga dilakukan dengan rumus. Yaitu, $A^k = PD^k P^{-1}$ dengan syarat bahwa matriks yang akan dipangkatkan haruslah dapat didiagonalkan terlebih dahulu.

Langkah-langkah untuk mendiagonalkan suatu matriks adalah :

1. Cari vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen yang berbeda.
2. Bentuk matriks P yang merupakan gabungan dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda.
3. Jika P terdiri dari n vektor yang bebas linier maka buktikan apakah $P^{-1}AP = D$, jika ya maka pemangkatan matriks dapat dilakukan dan sebaliknya.

Dengan menggunakan rumus di atas, maka pemangkatan matriks A berubah menjadi pemangkatan matriks diagonal.

5.2 Saran.

Sebelum menghitung pemangkatan matriks dengan menggunakan rumus $A^k = PD^k P^{-1}$, membuktikan bahwa $P^{-1}AP = D$ penting dilakukan, sebab sekalipun matriks P yang dapat dibalik berasal dari n vektor eigen yang berbeda, belum tentu matriks P mendiagonal matriks A .

DAFTAR KEPUSTAKAAN

- Anton,H. 1990. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.
- Arifin,A. 1985. *Aljabar linier*. Edisi Pertama. Bandung: ITB.
- Budhi,WS. 1995. *Aljabar Linier*. Jakarta: Gramedia.
- Hoeffman,K, and Ray Kunze. 1971. *Linear Algebra*. Second Edition. New Jersey:
Prentice-Hall,inc.
- Jacob,B. 1990. *Linear Algebra*. New York: W.H Freeman and Company.
- Leon, SJ. 2001. *Aljabar linier dan Aplikasinya*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.

MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS ANDALAS