APROKSIMASI KUADRAT TERKECIL

TESIS

Oleh :

ELZA MARMORA
06215107

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Oleh : Elza Marmora
(Dibawah bimbingan I Made Arnawa dan Jenizon)

RINGKASAN

Masalah yang sering dijumpai dalam bidang matematika adalah mencari suatu persamaan yang dapat mewakili suatu kumpulan data percobaan. Aljabar dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem yang tidak konsisten dari persamaan linier.

Penerapan metode kuadrat terkecil di Fisika terdapat pada Hukum Hooke dan Hukum Newton, kemudian dalam ilmu Statistika yaitu Analisis Regresi Linier Berganda dan juga penerapan kuadrat terkecil pada bidang Ekonomi, ilmu Kedokteran dan ilmu lainnya.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari Aproksimasi Kuadrat Terkecil pada Aljabar Linier, untuk mencari solusi kuadrat terkecil.

Penelitian ini dilakukan empat tahap, pada tahap pertama mengumpulkan literatur, berupa buku dan jurnal, yang berkaitan dengan masalah penelitian. Kemudian dikumpulkan konsep-konsep sebagai landasan pemikiran untuk mencari solusi masalah penelitian, tahap kedua seluruh konsep yang telah dikumpulkan dipelajari dengan mengurutkan, mengklasifikasikan, mengelompokkan dan mempelajari pemakaian aproksimasi pada bidang - bidang ilmu lainnya, untuk tahap ketiga dilakukan pembahasan tentang Aproksimasi kuadrat secara Aljabar Linier yang meliputi pembuktian Teorema dan memberikan contoh – contoh penyelesaian secara solusi kuadrat terkecil dan pada tahap ke empat mengambil kesimpulan dan saran.

Dari hasil penelitian ini menunjukkan bahwa untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten dari persamaan $A\vec{X} = \vec{b}$ mempunyai solusi kuadrat terkecil yaitu solusi dari $A\vec{X} = \mathrm{Pr}\,oyW(\vec{b})$ dan $(A^t A)\vec{X} = A^t\vec{b}$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Suatu masalah yang sering dijumpai dalam bidang matematika terapan adalah mencari suatu persamaan yang dapat mewakili suatu kumpulan data percobaaan. Pengunaan aljabar dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem yang tak konsisten dari persamaan linier, kemudian untuk mendapatkan hubungan matematika fungsi y = f (x) antara dua variabel x dan y.

Penerapan metode kuadrat terkecil di fisika terdapat pada hukum Hooke dan hukum Newton.

Contoh. Hukum Hooke di dalam Fisika menyatakan bahwa panjang x dari sebuah pegas adalah sebuah fungsi linier dari gaya y yang diterapkan. Jika $y = a + bx$, maka koefisien b dinamakan konstanta pegas. Misalkan sebuah pegas mempunyai ukuran panjang sebesar 6,1 inci (yakni $x = 6{,}1$ bila $y = 0$), dengan gaya sebesar 2 pon, 4 pon, dan 6 pon serta panjang pegas 7,6 inci, 8,7 inci dan 10,4 inci. Akan ditentukan konstanta pegas.

dengan $y = Mv$ untuk $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

untuk menentukan kuadrat terkecil untuk $v = \left(M'M\right)^{-1} M'y$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$M'M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6{,}1 & 7{,}6 & 8{,}7 & 10{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 32{,}8 \\ 32{,}8 & 278{,}82 \end{bmatrix}$$

$$M'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6{,}1 & 7{,}6 & 8{,}7 & 10{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 112{,}4 \end{bmatrix}$$

$$(\ M'M\ )^{-1} = \begin{bmatrix} 7{,}069 & -0{,}83 \\ -0{,}83 & 0{,}10 \end{bmatrix}$$

$$v = (M'M)^{-1} M'y = \begin{bmatrix} 7{,}069 & -0{,}83 \\ -0{,}83 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 112{,}4 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -8{,}46 \\ 1{,}28 \end{bmatrix}$$

Jadi konstanta pegas adalah $b = 1{,}28$ pon / inci

Dalam Ilmu Statistika yaitu analisis regresi linier berganda adalah suatu teknik statistika yang digunakan untuk menarik kesimpulan mengenai hubungan antara beberapa variabel di dalam suatu sistem. Model regresi linier berganda digunakan untuk memodelkan antara suatu variabel bebas dan variabel tak bebas.

Contoh. Tentukan persamaan model regresi linier berganda dari data berikut :

Y	X_1	X_2
3	1	2
7	2	4
4	1	2
8	3	4
9	5	4
19	10	8
29	14	14
12	4	8

Penyelesaian.

Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y	Y^2
3	1	2	1	4	2	3	6	9
7	2	4	4	16	8	14	28	49
4	1	2	1	4	2	4	8	16
8	3	4	9	16	12	24	32	64
9	5	4	25	16	20	45	36	81
19	10	8	100	64	80	190	152	361
29	14	14	196	196	196	406	406	841
12	4	8	16	64	32	48	96	144
Σ =91	**40**	**46**	**352**	**380**	**352**	**734**	**764**	**1565**

$\Sigma Y = 91$ $\Sigma X_1 = 40$ $\Sigma X_1^2 = 352$

$\Sigma X_2 = 46$ $\Sigma X_2^2 = 380$ $\Sigma Y^2 = 1565$

$\Sigma X_1X_2 = 352$ $\Sigma X_1 \text{Y} = 734$ $\Sigma X_2 \text{Y} = 764$

$$\text{Matrik Rancangan : } X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ 1 & x_{13} & x_{23} \\ 1 & x_{14} & x_{24} \\ 1 & x_{15} & x_{25} \\ 1 & x_{16} & x_{26} \\ 1 & x_{17} & x_{27} \\ 1 & x_{18} & x_{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 10 & 8 \\ 1 & 14 & 14 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor Respon : } \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \\ 19 \\ 29 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \Sigma x_{11} & \Sigma x_{21} \\ \Sigma x_{11} & \Sigma x_{11}^2 & \Sigma x_{11} x_{21} \\ \Sigma x_{21} & \Sigma x_{11} x_{21} & \Sigma x_{21}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 40 & 46 \\ 40 & 352 & 352 \\ 46 & 352 & 380 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \Sigma y_1 \\ \Sigma x_{11} y_1 \\ \Sigma x_{21} y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 \\ 734 \\ 764 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan $(X'X)^{-1}$ dilakukan OBE, sehingga didapat

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4611 & 0{,}0464 & -0{,}0988 \\ 0{,}0464 & 0{,}0432 & -0{,}0457 \\ -0{,}0988 & -0{,}0457 & 0{,}0569 \end{pmatrix}$$

Sehingga $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}4611 & 0{,}0464 & -0{,}0988 \\ 0{,}0464 & 0{,}0432 & -0{,}0457 \\ -0{,}0988 & -0{,}0457 & 0{,}0569 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 91 \\ 734 \\ 764 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 41{,}9601 + 34{,}0576 - 75{,}4832 \\ 4{,}2224 + 31{,}7088 - 34{,}9148 \\ -0{,}9908 - 33{,}5438 + 43{,}4716 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5345 \\ 1{,}0164 \\ 0{,}9370 \end{pmatrix}$$

Jadi Persamaan Regresi Linier berganda adalah :

$$\hat{Y} = 0{,}5345 + 1{,}0164\,X_1 + 0{,}9370\,X_2$$

Karena banyaknya penerapan – penerapan kuadrat terkecil pada bidang Fisika, Statistika, Ekonomi, Ilmu Kedokteran dan Ilmu lainya, yang menarik penulis untuk membahasnya dalam Aljabar Linier.

1.2. Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas yang menjadi permasalahan adalah bagaimana menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten.

1.3. Manfaaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan pengetahuan dan ilmu tentang Aprosimasi Kuadrat Terkecil pada data dan juga cara mencocokan kuadrat terkecil.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari Aproksimasi kuadrat terkecil pada Aljabar Linier, untuk mencari solusi kuadrat terkecil.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten secara aljabar linier dengan cara memproyeksikan matrik $\vec{b}$ ke ruang kolom matrik A. Sistem persamaan linier A $\vec{X} = \vec{b}$ mempunyai solusi kuadrat terkecil yaitu solusi dari sistem A $\vec{X}$ = Proy $_{w}(\vec{b})$ dan solusi dari sistem $A\vec{X} = \vec{b}$ adalah solusi dari sistem $(A'A)\vec{X} = A'\vec{b}$.

5.2. Saran

Untuk mempermudah menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten secara mudah dan cepat, diharapkan kepada peneliti selanjutnya dapat menerapkan dalam bentuk sebuah program.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1991, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Jakarta.

Anton, H. 2000, *Dasar – dasar Aljabar Linier*, Interaksara, Jakarta

Budhi, W. 1995, *Aljabar Liner*, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Jacob, B. 1990, *Linear Algebra*,W.H. Freeman And Company, New York.

Leon, S. 2001, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, Erlangga, Jakarta

Rorress, A. 2005, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Jakarta.

Saintek, 2004, *Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, Lembaga penelitian Universitas Negeri , Padang.