FORMULA UNTUK MENENTUKAN AKAR–AKAR PERSAMAAN KUBIK DAN KUARTIK

TESIS

Oleh:

BETTY ATMI

06215005

PROGRAM PASCASARJANA

UNIVERSITAS ANDALAS

2008

Formula Untuk Menentukan Akar-Akar Persamaan Kubik dan Kuartik

Oleh: Betty Atmi

(Dibawah bimbingan Muhafzan, Ph.D. dan Zulakmal, M.Si)

RINGKASAN

Persamaan polinomial merupakan salah satu bagian terpenting dari ilmu matematika. Persamaan kuadrat merupakan dasar dari persamaan polinomial. Persamaan kubik dan persamaan kuartik merupakan ekspresi aljabar yang dapat diselesaikan dengan berbagai cara.

Dalam permasalahan persamaan polinomial selalu menuntut suatu penyelesaian atau menentukan akar-akar persamaan tersebut. Penyelesaian persamaan polinomial ini dapat dilakukan dengan berbagai cara/metode tergantung pada bentuk soal yang ada.

Tujuan penelitian: 1) Menelusuri proses pembentukan formula umum akar persamaan kubik dan menelaah karakteristik akar persamaan kubik. 2) Menelusuri proses pembentukan formula umum akar persamaan kuartik dan menelaah karakteristik akar persamaan kuartik. 3) Menguji formula Cardano pada persamaan kubik. 4) Menguji formula ferrari pada persamaan kuartik.

Persamaan polinomial yang dibahas disini khususnya adalah persamaan kubik yang berbentuk $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a_n \neq 0$ dan persamaan kuartik dengan bentuk umum $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a_n \neq 0$.

Dalam hal ini penulis menggunakan formula Cardano untuk menyelesaikan persamaan kubik, yaitu:

$$Z = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sedangkan untuk menyelesaikan persamaan kuartik menggunakan formula

Ferrari yaitu: $Z = -\dfrac{b}{4a} + \dfrac{\pm\sqrt{\alpha + 2y} \pm \sqrt{-\left(3\alpha + 2y \pm \dfrac{2\beta}{\sqrt{\alpha + 2y}}\right)}}{2}.$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Polinomial merupakan ekspresi aljabar dari bentuk $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ dengan n bilangan bulat tak negatif, dan merupakan derajat polinomial tersebut, x merupakan variabel, sedangkan a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , … , a_1, a_0 adalah konstanta berupa bilangan riil. Bersesuaian dengan bentuk polinomial maka bentuk umum persamaan polinomial dalam x adalah:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0.$$

Persamaan di atas biasa juga ditulis dalam bentuk $P_n(x) = 0$, $n \geq 1$ dengan $a_n \neq 0$.

Jika $n = 1$ maka persamaan polinomial berderajat 1 dan berbentuk $a_1 x + a_0 = 0$, dan biasa disebut persamaan linear. Jika $n = 2$ maka persamaan polinomial berderajat 2 dan berbentuk $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0$, dan biasa disebut persamaan kuadrat. Jika $n = 3$ maka persamaan polinomial berderajat 3 yang biasa disebut persamaan kubik, dan berbentuk:

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

Jika $n = 4$ maka persamaan polinomial berderajat 4 dan berbentuk sebagai berikut:

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2}$$

Persamaan polinomial berderajad 4 biasa disebut persamaan kuartik.

Ada beberapa cara yang sering digunakan untuk menentukan akar dari persamaan polinomial. Untuk persamaan kuadrat dengan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselesaikan dengan cara menggunakan rumus yang dikenal dengan rumus "abc", yaitu $x_{1.2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, (Shifrin, 1996).

Demikian juga persamaan kubik, persamaan kuartik, dan persamaan polinomial lainnya, berbagai metode tersedia.

Metode Horner merupakan suatu metode yang menaksir akar-akar riil dari suatu persamaan (Borowski, 1989). Untuk menentukan akar tersebut dicari kemungkinan-kemungkinan yang akan menghasilkan persamaan tersebut bernilai nol. Sebagai contoh, perhatikan persamaan kubik: $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$. Untuk menentukan akar-akar dengan metode Horner terlebih dahulu ditentukan faktor dari 18, yaitu ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18. Di antara faktor-faktor tersebut dicari kemungkinan-kemungkinan yang menghasilkan persamaan tersebut bernilai nol, sehingga diperoleh akar persamaan tersebut $x = 2$, $x = 3$, $x = -3$.

Metode numerik menggunakan metode-metode hampiran, dan metode-metode iterasi dalam pencarian akar persamaan (polinomial). Pada prinsipnya, langkah awal yang diperlukan metode ini adalah menentukan dua nilai tebakan awal sebagai selang lokasi akar. Tebakan awal didapat dengan menyelidiki lokasi akar persamaan, yaitu dengan cara grafik, dan dengan cara tabulasi. Langkah selanjutnya dilakukan pengiterasian untuk mendapatkan sebuah nilai hampiran akar persamaan (Shifrin, 1996).

Metode-metode di atas mempunyai kelemahan. Untuk persamaan yang mempunyai akar berupa bilangan irrasional, metode Horner tidak praktis lagi digunakan. Sedangkan metode numerik, untuk mendapatkan satu akar dari persamaan dibutuhkan proses pengiterasian berkali-kali hingga didapatkan nilai hampiran akar yang dicari. Pada metode numerik, nilai akar yang didapat adalah berupa nilai hampiran, bukan nilai sebenarnya.

Sebagai contoh, perhatikan persamaan $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$. Secara Horner, sulit ditemukan suatu bilangan agar persamaan di atas bernilai nol.

Secara numerik akan dibutuhkan suatu proses yang panjang untuk menemukan akar-akar persamaan tersebut.

Pertanyaan yang muncul adalah, bagaimana menentukan akar-akar persamaan polinomial dalam bentuk umum? Secara khusus, apakah rumus untuk menentukan akar persamaan kubik dan persamaan kuartik seperti halnya pada persamaan kuadrat? Sebenarnya, permasalahan ini telah dijawab oleh Cardano untuk persamaan kubik (http://egworld.ipmnet.ru/en/solution/ae0108) dan Ferrari untuk persamaan kuartik (Polyanin, 2004). Dalam penelitian ini, akan didiskusikan kembali metoda yang dikemukakan oleh Cardano dan Ferrari tersebut. Sebagaimana di persamaan kuadrat, karakteristik akar suatu persamaan kuadrat ditentukan dari bentuk diskriminannya. Jika diskriminannya besar dari 0, maka persamaan kuadrat mempunyai 2 akar riil. Jika diskriminan 0, maka persamaan kuadrat mempunyai 2 akar yang sama. Jika diskriminan kecil dari 0 maka persamaan kuadrat mempunyai 2 akar kompleks.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk menelaah bagaimanakah formula untuk menentukan akar-akar persamaan polinomial bentuk umum, khusus, kubik dan kuartik. Untuk itu penelitian ini diberi judul "Formula Untuk Menentukan Akar-akar Persamaan Kubik dan Kuartik".

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka dirumuskan masalah berikut:

1. Bagaimanakah formula umum untuk menentukan akar persamaan kubik (1) dan bagaimanakah sifat akar persamaan kubik tersebut?
2. Bagaimanakah formula umum untuk menentukan akar persamaan kuartik (2) dan bagaimanakah sifat akar persamaan kuartik tersebut?

3. Apakah formula Cardano dapat diterapkan pada persamaan kubik?
4. Apakah formula ferrari dapat diterapkan pada persamaan kuartik?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

1. Menelusuri proses pembentukan formula umum akar persamaan kubik (1) dan menelaah karakteristik akar persamaan kubik.
2. Menelusuri proses pembentukan formula umum akar persamaan kuartik (2) dan menelaah karakteristik akar persamaan kuartik.
3. Menguji formula Cardano pada persamaan kubik.
4. Menguji formula ferrari pada persamaan kuartik.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat:

1. Menambah wawasan penulis tentang formula penentuan akar-akar persamaan kubik dan kuartik dan sifat-sifat akarnya.
2. Memberikan masukan kepada pembaca tentang formula untuk menentukan akar-akar persamaan kubik dan kuartik.
3. Menjadi sumber inspirasi bagi penelitian lain yang ingin mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Formula umum untuk menentukan akar persamaan kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ adalah dengan menggunakan formula Cardano sebagai berikut:

$$Z = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. Karakteristik akar persamaan kubik ditentukan oleh $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ dengan beberapa kemungkinan:

   a. jika $D < 0$, maka diperoleh tiga akar riil berbeda.

   b. Jika $D = 0$, maka diperoleh tiga akar riil yang sama.

   c. Jika $D > 0$, maka diperoleh satu akar riil dan dua akar kompleks.

3. Formula umum untuk menentukan akar persamaan kuartik $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ adalah dengan menggunakan formula Ferrari sebagai berikut:

$$Z = -\frac{b}{4a} + \frac{\pm\sqrt{\alpha + 2y} \pm \sqrt{-\left(3\alpha + 2y \pm \frac{2\beta}{\sqrt{\alpha + 2y}}\right)}}{2}$$

4. Karakteristik akar persamaan kuartik sebagai berikut:

   a. Mempunyai satu akar riil.

   b. Empat akar riil berbeda.

   c. Satu akar kompleks dan tiga akar riil.

DAFTAR PUSTAKA

Ahlfors, L .V (1979). *Complex Analysis.* Mc Graw-Hill Book Company, New York.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis, Third Edition.* John Wiley & Sons Inc, Singapore.

Borowski E. J & Borwein (1989). *Dictionary of Mathematics.*Harper Colllins Publisher, Great Britain.

Churchill, V. R, Brown, W. J. (1974). *Complex Variables and Applications.* Mc Graw-Hill Inc, New York.

Hazewinkel, M (1995.) *Encyclopedia of Mathematics Volume* 2. Kluwer Academic Publisher, Singapore.

Polyanin, A. D (2004). *Quartic Equation.* http://egword.ipmnet/solutions/ac/aeo 0108.pdf. diakses 11 Februari 2006.

Susila, I . N (1993). *Dasar-dasar Metode Numerik.* Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Pendidikan Tinggi Proyek Pembinaan, Bandung.

Shifrin, T (1996). *Abstrack Algebra: A Geometry Approach.* Prentice Hall Inc, New Jersey.

Spiegel, M & Martono, K (1987). *Teori & Soal-Soal Peubah Kompleks.* Erlangga, Jakarta.

Ward, R. L (2002). *Cubic and Quartic Equations.* http://www.york.ac.uk/depts/ maths/histstat/cubic.pdf

Anonymous, http://egworld.ipmnet.ru/en/solution/ae0108.pdf. Diakses 15 Januari 2008