DIMENSI RUANG VEKTOR $\mathcal{L}(V,W)$

TESIS

Oleh:

SITI MICO HANDARU

06215128

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

DIMENSI RUANG VEKTOR $\mathfrak{L}\,(V,W)$

Oleh: Siti Mico Handaru

(Dibawah bimbingan Dr. I Made Arnawa, M.Si dan Zulakmal, M.si.)

RINGKASAN

Dimensi dari suatu ruang vektor V adalah banyaknya vektor di dalam suatu basis untuk V. Misalkan $S = \{v_1,\ v_2, \dots, v_n\}$ dengan $v_1,\ v_2, \dots, v_n \in V$. S dinamakan basis untuk V jika

(i) S bebas linier

(ii) S membangun V.

Dimensi dari masing-masing ruang vektor V dan W adalah banyaknya vektor di dalam suatu basis untuk masing-masing V dan W tersebut. Himpunan semua transformasi linear dari V ke W dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar membentuk sebuah ruang vektor. Ruang vektor dari transformasi-transformasi linear tersebut biasanya dinotasikan dengan $\mathfrak{L}\,(V,W)$.

$\mathfrak{L}\,(V,W) = \{T: V \to W | T \text{ transformasi linear}\}$.

Tujuan penelitian ini untuk menentukan dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}\,(V,W)$ melalui pemetaan isomorfisma.

Untuk menentukan dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}\,(V,W)$ dilakukan studi literatur. Penelitian ini dilaksanakan mulai Agustus 2008 sampai dengan Oktober 2008 di Perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

Di dalam penelitian ini dilakukan pembahasan tentang dimensi ruang vektor $\mathcal{L}(V,W)$, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Misalkan diberikan ruang vektor V yang berdimensi n dan ruang vektor W yang berdimensi m. Tunjukkan bahwa $\mathcal{L}(V,W)$ suatu ruang vektor.
2. Tunjukkan $M_{mxn} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in R, i = 1,2,\dots,m \; dan \; j = 1,2,\dots n \right\}$

   adalah suatu ruang vektor atas F.
3. Tunjukkan bahwa ada suatu pemetaan isomorfisma dari $\mathcal{L}(V,W)$ ke M_{mxn} .
4. Tunjukkan bahwa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$

   sebanyak $m \cdot n$ merupakan basis dari ruang vektor matriks M_{mxn} .
5. Tunjukkan bahwa $\dim(M_{mxn}) = mn$

Dari hasil pembahasan yang dilakukan dapat ditunjukkan kelima hal di atas.

Dengan terbuktinya lima hal di atas, maka dapat disimpulkan bahwa, $\mathcal{L}(V,W) = \{T: V \to W | T \text{ transformasi linear}\}$ dengan V dan W ruang vektor masing-masing berdimensi n berdimensi m adalah ruang vektor yang berdimensi berhingga. Dim ($\mathcal{L}(V,W)$) dapat ditentukan dengan menunjukkan bahwa matriks standar dari M_{mxn} merupakan basis, sehingga $\dim(M_{mxn}) = mn$. Karena $\mathcal{L}(V,W) \cong M_{mxn}$ maka $Dim\,(\mathcal{L}(V,W)) = dim\,(M_{mxn})$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam matematika, dimensi adalah parameter yang dibutuhkan untuk menggambarkan posisi dan sifat-sifat objek dalam suatu ruang. Sebagai contoh sebuah garis dianggap sebagai yang berdimensi satu, sebuah bidang dianggap sebagai berdimensi dua, dan ruang dianggap sebagai yang berdimensi tiga.

Dimensi dari suatu ruang vektor V adalah banyaknya vektor di dalam suatu basis untuk V. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.
S dinamakan basis untuk V jika

(i) S bebas linier

(ii) S membangun V.

Dimensi ruang vektor V disebut juga dimensi aljabar (dimensi Hamel) untuk membedakannya dari tipe-tipe lain dari dimensi (http//en.wikipedia.orq/wiki/ *Dimension*). Dimensi dari ruang vektor $\boldsymbol{V}$ atas lapangan F ditulis dim $\boldsymbol{V}$. Ruang vektor V dikatakan berdimensi n ditulis dim $\boldsymbol{V} = n$ jika V mempunyai sebuah basis dengan n elemen.

Setiap ruang vektor memiliki basis (http//en.wikipedia.orq/wiki/*Basis*). Semua basis dari suatu ruang vektor memiliki kardinalitas (*cardinality*; jumlah elemen-elemen) yang sama, yang disebut dimensi dari ruang vektor. Suatu ruang vektor yang memiliki suatu basis berhingga disebut ruang vektor berdimensi hingga.

Misalkan V dan W adalah dua ruang vektor atas lapangan F, maka transformasi linear dari V ke W adalah fungsi $T : V \rightarrow W$ yang memenuhi

(i) Jika $u, v \in V$, maka $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(ii) Jika $v \in V$ dan $k \in F$, maka $T(kv) = kT(v)$

Misalkan V dan W adalah dua ruang vektor atas lapangan F, maka himpunan semua transformasi linear dari V ke W dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar membentuk sebuah ruang vektor. Ruang vektor dari transformasi-transformasi linear tersebut biasanya dinotasikan dengan $\mathcal{L}(V,W)$. $\mathcal{L}(V,W) = \{T: V \rightarrow W | T \text{ transformasi linear}\}$.

Dimensi dari jangkauan T dinamakan rank T dan dimensi dari kernel T dinamakan nulitas (*nullity*) dari T. Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk mempelajari bagaimana menentukan dimensi ruang vektor $\mathcal{L}(V,W)$.

Menurut Jacob (1990:187) jika $T: V \rightarrow W$ suatu pemetaan isomorfisma maka $\dim(V) = \dim(W)$. Berdasarkan pendapat tersebut maka pada tesis ini akan dibahas bagaimana menentukan dimensi ruang vektor dengan menggunakan pemetaan isomorfisma. Maka penelitian ini diberi judul
"DIMENSI RUANG VEKTOR $\mathcal{L}(V,W)$".

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas, masalah yang akan dibahas adalah bagaimana menentukan dimensi ruang vektor $\mathcal{L}(V,W)$ melalui pemetaan isomorfisma.

1.3 Tujuan penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi ruang vektor $\mathcal{L}(V,W)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya tentang dimensi ruang vektor $\mathcal{L}(V,W)$.

BAB V

KESIMPULAN

Dari pembahasan yang dilakukan telah dibuktikan bahwa:

1. $\mathcal{L}(V,W)$ merupakan suatu ruang vektor.

2. $M_{mxn} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \boldsymbol{R}, i = 1, 2, \ldots, m \; dan \; j = 1, 2, \ldots n \right\}$

   adalah suatu ruang vektor atas F.

3. Ada suatu pemetaan isomorfisma dari $\mathcal{L}(V,W)$ ke M_{mxn} .

4. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$ sebanyak $m \cdot n$

   merupakan basis dari ruang vektor matriks M_{mxn} .

5. $\mathrm{Dim}(M_{mxn}) = mn$

Dengan terbuktinya lima hal di atas, maka dapat disimpulkan bahwa, $\mathcal{L}(V,W) = \{T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} | T$ transformasi linear$\}$ dengan V dan W ruang vektor masing-masing berdimensi n berdimensi m adalah ruang vektor yang berdimensi berhingga. Dim $(\mathcal{L}(V,W))$ dapat ditentukan dengan menunjukkan bahwa matriks standar dari M_{mxn} merupakan basis, sehingga $\dim(M_{mxn}) = mn$. Karena $\mathcal{L}(V,W) \cong M_{mxn}$ maka $Dim\,(\mathcal{L}(V,W)) = dim\,(M_{mxn})$.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Anton, Howard. 1988. *Aljabar Linier*. Bandung: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapan*. Jakarta: Gramedia.

Durbin, J.R. 2000. *Modern Aljebra An Introduction Fourth Edition*.

Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. New York: W. H. Freeman and company.

Khanna, Vijay K. 1993. *A Course in Abstract Algebra*. New Delhi: Vikas publishing House PVT LTD.

Lang, Serge. 2004. *Undergraduate Algebra*. New York: Springer.

Lay, David C. 2003. *Linear Algebra and Its Applications*. New York: University of Maryland.

Noble, B dan Daniel, J.W. 1988. *Applied Linear Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall.

Schaum's. 2004. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Strang, Gilbert. 1993. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley: Cambridge Press.

Wikipedia. *Dimension*, (http//en.wikipedia.orq/wiki/*Dimension*, diakses 1 September 2008)

Wikipedia. *Basis*, (http//en.wikipedia.orq/wiki/*Basis*, diakses 9 September 2008)