PENYELESAIAN PERSAMAAN LYAPUNOV DENGAN MENGGUNAKAN METODA SCHUR

Oleh:

NUR ISLAM
06215003

T e s i s

**Sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Sains
pada Program Pascasarjana Universitas Andalas**

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008**

Penyelesaian Persamaan Lyapunov
Dengan Metoda Schur

oleh: Nur Islam
(Dibawah bimbingan Muhafzan dan Zulakmal)

RINGKASAN

Terdapat sebuah persamaan berbentuk $XA + BX = C$ dimana $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{m\times m}$ dan $C \in \Re^{m\times n}$. Masalah utama dari persamaan adalah menentukan matriks $X \in \Re^{m\times n}$ yang memenuhi persamaan. Persamaan diatas sering dikatakan sebagai persamaan Sylvester. Persamaan Lyapunov merupakan hal khusus dari persamaan Sylvester dengan bentuk sebagai berikut: $XA + A^t X = C$ dengan $C \in \Re^{n\times n}$. Berbagai metode tersedia baik secara analitik maupun secara numerik. Dalam berbagai literatur menyebutkan bahwa solusi secara analitik sulit dilakukan bila matriks A berukuran besar. Oleh karena itu akan diselidiki penyelesaian persamaan Lyapunov secara numerik dengan menggunakan metoda Schur.

Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan Persamaan Lyapunov dengan metoda Schur. Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur yang membahas tentang Persamaan Lyapunov dan bertempat di Perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

Penyelesaian persamaan Lyapunov dengan metoda Schur dilakukan dalam beberapa langkah yaitu:

1. Masalah Reduksi.

   Persamaan Lyapunov $XA + A^TX = C$ direduksi ke bentuk $YR^T + RY = \hat{C}$ dimana

   $R = U^TA^TU$, $\hat{C} = U^TCU$, dan $Y = U^TXU$.

2. Solusi Masalah Reduksi.

   Persamaan reduksi $YR^T + RY = \hat{C}$ solusinya adalah Y.

3. Kembali kepenyelesaian masalah sebenarnya.

   Bila nilai Y telah diperoleh maka nilai X dapat dicari dengan $X = UYU^T$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Perhatikan persamaan berikut:

$$XA + BX = C \tag{1.1.1}$$

dimana $A \in \Re^{n \times n}$, $B \in \Re^{m \times m}$ dan $C \in \Re^{m \times n}$. Masalah utama dari persamaan (1.1.1) adalah menentukan matriks $X \in \Re^{m \times n}$ yang memenuhi persamaan (1.1.1). Persamaan (1.1.1) sering dikatakan sebagai persamaan Sylvester (Datta, 2004).

Persamaan Lyapunov merupakan hal khusus dari persamaan (1.1.1), dengan bentuk sebagai berikut:

$$XA + A^T X = C \tag{1.1.2}$$

dengan $C \in \Re^{n \times n}$.

Berbagai metode tersedia untuk menyelesaikan persamaan Lyapunov baik secara analitik maupun secara numerik. Dalam berbagai literatur disebutkan bahwa solusi secara analitik sulit dilakukan terutama bila matriks A berukuran besar. Bentuk Jordan Kanonik adalah salah satu cara penyelesaian persamaan secara numerik. Pada cara ini ditemukan beberapa kekeliruan (Datta, 2004). Oleh karena itu dalam penelitian ini akan diselidiki penyelesaian persamaan (1.1.2) secara numerik dengan menggunakan metoda Schur.

1.2. Perumusan Masalah

Diberikan Persamaan Lyapunov :

$$XA + A^T X = C \qquad (1.2.1)$$

dimana A,C $\in \Re^{n \times n}$. Masalah yang akan diteliti adalah bagaimana mengaplikasikan Metode Schur dalam mencari matriks $X \in \Re^{n \times n}$ yang memenuhi persamaan (1.2.1).

1.3. Tujuan Penelitian

Pada dasarnya tujuan dari penelitian ini adalah menyelesaikan Persamaan Lyapunov dengan menggunakan metoda Schur

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk dipergunakan dalam bidang teknik, khususnya dalam menguji kestabilan sistem kontrol linier.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Teorema Schur (Bentuk Schur Riil = BSR)

Teorema 4.1.1 (Teorema Schur) (Gullens,1993)

Jika A matrik nxn, yang semua nilai eigennya bilangan rill, maka A serupa ortogonal dengan matrik segitiga atas R, dengan kata lain ada matrik ortogonal U sedemikian sehingga

$$U^T AU = R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (4.1.1)$$

Matriks R dinamakan Bentuk Schur Riil (BSR) dari matriks A.

Bukti:

Pembuktian yang digunakan dengan induksi matematika terhadap n. Karena pernyataan ini jelas benar untuk n = 1, kita tinggal menunjukkan untuk n = r – 1, maka teorema itu juga harus benar untuk n = r. Dengan demikian teorema itu benar untuk semua n.

Misalkan A adalah matrik $r \times r$ dan semua nilai eigennya bilangan riil. Misalkan pula λ_1 adalah nilai eigen matrik A yang berhubungan dengan vektor eigen X_1. Misalkan bahwa X_1 adalah vektor satuan. Dengan demikian,

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \ dan \ X_1^T X_1 = X_1 X_1 = 1 \qquad (4.1.2)$$

Dengan menggunakan Proses Gram-Schmidt dicari matrik U_1 yang kolom pertamanya adalah X_1.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. KESIMPULAN

Persamaan Lyapunov $XA + A^T X = C$ dapat diselesaikan dengan metoda Schur yang inti dari metoda ini adalah merobah A^T ke bentuk BSR (Bentuk Schur riil). Terdapat tiga langkah dalam metoda ini yaitu:

1. Masalah reduksi yaitu mereduksi persamaan Lyapunov $XA + A^T X = C$ menjadi $YR^T + RY = \hat{C}$.
2. Solusi masalah reduksi yaitu mencari nilai Y
3. Kembali ke penyelesaian masalah sebenarnya yaitu mencari nilai X.

5.2. SARAN

Berdasarkan hasil penelitian ini diharapkan kepada pembaca agar bisa melengkapi penelitian ini, karena penulis membatasi matriks dengan elemen bilangan riil dan nilai eigennya juga pada bilangan riil. Diharapkan kepada pembaca agar bisa melanjutkan penelitian ini pada matriks dengan bilangan kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga. Jakarta.

Datta, B. N. 2004. *Numerical Methods for Linier Control System*. Elsevier Academic Press. California

Edward, E. dan Halawa, H. 1995. *Pemrograman dengan C/C ++ dan Aplikasi Numerik*. PT Gelora Aksara Pratama. Jakarta.

Goldberg, J. L. 1991. *Matrix Theory With Applications*. McGraw-Hill. New York

Gullens, C. G. 1993. *Aljabar Linier dan Penerapannya*. Gramedia. Jakarta.

Jacob, B. 1990. *Linier Algebra*. W.H, Freeman And Company. New York