LAPORAN HASIL

PENELITIAN FUNDAMENTAL LANJUTAN

TAHUN ANGGARAN 2010

MASALAH KONTROL KUADRATIK LINIER POSITIF TERKENDALA SISTEM SINGULAR KONTINU INVARIAN WAKTU

Oleh

Muhafzan, Ph.D

Dr. Susila Bahri, M.Sc

Dibiayai oleh Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi

Sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian

Nomor: 003/H.16/PL/HB-MT/III/2010 tanggal 04 Maret 2010

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

NOVEMBER, 2010

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN

1. Judul Penelitian : **Masalah Kontrol Kuadratik Linier Positif Terkendala Sistem Singular Kontinu Invarian Waktu**

2. Peneliti Utama :
   a. Nama lengkap : Muhafzan, Ph.D
   b. Jenis kelamin : L
   c. NIP : 19670602 199302 1 001
   d. Pangkat/Golongan : Penata TK. I/IIId
   e. Jabatan struktural : -
   f. Jabatan fungsional : Lektor
   g. Fakultas/Jurusan : MIPA/Matematika
   h. Perguruan Tinggi : Universitas Andalas
   i. Pusat Penelitian : Universitas Andalas

3. Jumlah Tim Peneliti : 2 orang

4. Lokasi Penelitian : Jurusan Matematika FMIPA UNAND
5. Kerjasama dengan institusi lain : tidak ada
   a. Nama Institusi :
   b. Alamat :
6. Masa Penelitian : 2 (dua) tahun

7. Biaya yang diperlukan (tahun 2) : Rp. 17.950.000

Mengetahui,
Dekan Fakultas MIPA
Universitas Andalas

Prof. Dr. H. Emriadi, MS
NIP. 19620409 198703 1 003

Padang, 12 November 2010
Ketua Peneliti,

Muhafzan, Ph.D
NIP. 19670602 199302 1 001

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian Universitas Andalas

Dr. Syafrimen Yasin, MS, M.Sc
NIP. 196204161986101001

RINGKASAN DAN SUMMARY

Laporan hasil Penelitian Fundamental ini merupakan laporan untuk tahun terakhir dari dua tahun usulan penelitian yang diajukan. Oleh karena itu pada laporan hasil ini akan disampaikan tentang hasil akhir dari Masalah Kontrol Kuadratik Linier Positif Terkendala Sistem Singular Kontinu Invarian Waktu.

Untuk kesederhanaan, misalkan $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas n komponen, $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $m \times n$, $C_{\mathrm{p}}^{+}[\mathbb{R}^p]$ menyatakan ruang fungsi kontinu dengan domain $[0,\infty)$, $[E, A, B, C]$ menyatakan sistem singular kontinu invarian waktu, $'$ menyatakan transpose dan I menyatakan matriks identitas dengan dimensi yang sesuai.

Beberapa hasil telah diperoleh, seperti sistem kontrol linier standar yang ekivalen dengan sistem singular positif asal. Proses mendapatkannya adalah dengan menggunakan teorema Dekomposisi Singular yang telah tersedia dalam literatur aljabar linier. Himpunan pasangan kontrol-keadaan dari masalah kontrol kuadratik linier positif terkendala sistem singular positif juga telah dikonstruksi. Suatu pemetaan bijektif yang akan mentransformasikan masalah kontrol kuadratik linier positif terkendala sistem singular kontinu invarian waktu menjadi masalah kontrol kuadratik linier standar juga telah didapatkan.

Syarat perlu dan cukup agar matriks pembobot dalam fungsional biaya positif definit juga telah didapatkan yang tertuang dalam teorema 5.4. Dalam teorema 5.5 kami sajikan syarat perlu dan cukup agar pasangan $(\bar{A},\ \bar{B})$ dapat distabilkan, dan teorema 5.6 menyatakan syarat perlu dan cukup agar pasangan $(\bar{A} - \bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}',\ Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}')$ terdeteksi. Ketiga teorema ini dibuktikan secara detil. Sebagai hasil utama dari penelitian ini adalah teorema 5.7 yang juga dibuktikan secara detil.

Dari hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa terdapat pasangan kontrol-keadaan optimal $(u^*, x^*) \in \mathcal{A}_{ad}$ yang memenuhi

$$J(u^*, x_0) = \min_{(u(.),x(.))\in\mathcal{A}_{ad}} J(u(.), x_0),$$

Dengan (u^*, x^*) diberikan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & \mathbf{0} \\ \Lambda_1 & W_1 L \\ \Lambda_2 & W_2 L \end{pmatrix} x_1^*(t).$$

Kami menyarankan bahwa ada beberapa pertanyaan terbuka yang dapat dijadikan pengembangan riset untuk masa datang, yaitu bagaimana bentuk perluasan dari teori yang diajukan dalam penelitian ini, jika konstrain merupakan sistem singular diskrit, dan bagaimana pula jika konstrain merupakan sistem singular varian waktu.

PRAKATA

Kami sampaikan rasa syukur kehadirat Allah SWT bahwa laporan akhir penelitian Fundamental berjudul **Masalah Kontrol Kuadratik Linier Positif Terkendala Sistem Singular Kontinu Invarian Waktu** dapat kami selesaikan sesuai dengan jadwal yang telah ditentukan. Untuk itu pada kesempatan ini kami ucapkan banyak terima kasih khususnya kepada DP2M Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional yang telah memberikan dana sehingga terlaksananya penelitian ini dan kepada Lembaga Penelitian Universitas Andalas yang telah memfasilitasi semua keperluan peneliti sehingga kegiatan penelitian ini dapat dilaksanakan sesuai dengan rencana yang telah dibuat. Selain dari pada itu, kami sampaikan juga ucapan terima kasih kepada Dekan FMIPA Universitas Andalas dan Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan dukungan baik secara moril maupun materil sehingga pelaksanaan penelitian berjalan lancer tanpa kendala apapun.

Laporan ini merupakan laporan akhir dari dua tahun usulan penelitian Fundamental yang kami ajukan untuk periode dua tahun (TahunAnggaran 2009 dan 2010). Oleh karena itu laporan hasil ini baru merupakan laporan lengkap dari hasil-hasil yang diperoleh dalam rangka mencapai tujuan penelitian.

Sebagai manusia yang memiliki banyak kekurangan tentu laporan hasil penelitian ini masih banyak yang harus disempurnakan. Oleh karena itu kami harapkan saran dan kritik dari pembaca untuk memberikan masukan demi kesempurnaan laporan ini.

Demikian prakata laporan akhir penelitian ini kami sampaikan, atas perhatian, kritik dan saran, sebelumnya kami ucapkan terima kasih.

Padang, 12 November 2010

Peneliti

I. PENDAHULUAN

Perhatikan sistem kontrol linier kontinu invarian waktu berikut ini:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{1}$$

dimana $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matriks E diperbolehkan singular, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}, C \in \mathbb{R}^{q\times n}, D \in \mathbb{R}^{q\times r}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah variable (vektor) keadaan, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ adalah variabel kontrol (input), $y(t) \in \mathbb{R}^q$ adalah variabel output dan t menyatakan waktu. Dalam hal ini simbol $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran n$\times m$, dan $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas n komponen. Jika matriks E non singuar, maka sistem (1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t),\ x(0) = x_0,\ t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

dimana $\bar{A} = E^{-1}A, \bar{B} = E^{-1}B$. Sistem terakhir ini merupakan sistem kontrol linier klasik dan dapat dikatakan sebagai perumuman dari sistem singular (1). Sistem (1) sering disebut sebagai sistem singular kontinu invariant waktu (Verghese *et al*., 1981) dan secara sederhana, ditulis sebagai $[E, A, B, C, D]$.

Sistem $[E, A, B, C, D]$ didefinisikan sebagai sistem singular positif jika untuk semua $t \in \mathbb{R}_+$ berlaku $x(t) \geq 0$ dan $y(t) \geq 0$, untuk sebarang kontrol $u(t) \geq 0$ dan sebarang syarat awal konsisten $x_0 \geq 0$.

Masalah kontrol kuadratik linier positif terkendala sistem singular kontinu invarian waktu adalah masalah menemukan pengontrol positif stabil yang memenuhi sistem singular positif $[E, A, B, C]$ dan meminimumkan fungsi biaya kuadratik berikut ini:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty y'(t)y(t)\,dt, \tag{2}$$

Dengan asumsi bahwa $rank\ E = p < n$ dan sistem singular $[E, A, B, C, D]$ adalah regular, yaitu $\det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$, maka masalah yang akan diteliti adalah bagaimana cara mendapatkan vektor kontrol $u(t) \in \mathbb{R}^r$, dengan $u(t)$ adalah positif

dan stabil asimtotik, yang memenuhi sistem singular positif $[E, A, B, C, D]$ dan meminimumkan fungsi biaya kuadratik seperti yang tersebut pada persamaan (2) ?

Masalah kedua dalam penelitian ini adalah bagaimana bentuk syarat cukup yang menjamin eksistensi dan ketunggalan pengontrol positif stabil tersebut?

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Kontrol Linier Kontinu Invarian Waktu

Perhatikan sistem kontrol linier kontinu invarian waktu berikut ini:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{3}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel (vektor) keadaan, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ adalah variabel (vektor) kontrol, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ adalah variabel (vektor) output dan t menyatakan waktu. Secara sederhana, sistem (1) sering ditulis sebagai $[A, B, C]$. Sistem ini sering dijumpai dalam aplikasi karena sistem (1) merupakan model standar untuk beberapa permasalahan, terutama dalam bidang enginering, biologi, ekonomi dan lain-lain (Chen, 1999).

2.2. Masalah Kontrol Kuadratik Linier Klasik

Dalam beberapa literatur diantaranya Athan *et al*. (1966) dan Anderson *et al*. (1990), disebutkan bahwa masalah kontrol kuadratik linier klasik adalah masalah menentukan vektor kontrol $u(t) \in \mathbb{R}^r$, dengan $u(t)$ stabil asimtotik, yang memenuhi sistem $[A, B, C]$ dan meminimumkan fungsi biaya kuadratik (index performance):

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru)dt, \tag{4}$$

dengan Q adalah matriks simetris semidefinit positif dan R adalah matriks definit positif. Dengan asumsi bahwa sistem $[A, B, C]$ stabil asimtotik dan pasangan $[A, Q]$ terdeteksi, maka ekspresi eksplisit untuk kontrol $u(t) \in \mathbb{R}^r$ yang merupakan solusi untuk permasalahan ini adalah sebagai berikut:

$$u^*(t) = -Kx^*(t)$$

dimana $K = R^{-1}B^T P$, dan P adalah solusi semidefinit positif tunggal dari persamaan aljabar Riccati:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

Selanjutnya, matriks feedback $A - BK$ adalah stabil dan nilai minimum dari $J(x_0, u)$ adalah $x_0^T P x_0$ (Anderson *et al*., 1990).

2.3. Masalah Kontrol Kuadratik Linier Positif

Perlu diperhatikan bahwa kontrol $u^*(t)$ yang diperoleh dalam bagian 2.2 tidak selalu bernilai positif. Dalam beberapa aplikasi, kadang-kadang diinginkan bahwa kontrol $u(t)$ ini hanya bernilai positif saja. Fenomena seperti ini sering dijumpai dalam pemodelan masalah ekonomi, misalnya kuantitas seperti investasi dan pajak selalu bernilai positif. Selain itu pemodelan dari masalah transpor polutan dan populasi juga memerlukan variable-variabel yang bernilai positif. Fenomena-fenomena seperti ini juga memenuhi sistem $[A, B, C]$ dimana matriks A, B, C dan vector-vektor $x(t), u(t)$ dan $y(t)$ adalah positif. Sistem kontrol linier positif merupakan topik penelitian yang berkembang pesat dewasa ini.

Dalam Laabissi *et al.* (2006) disebutkan bahwa: "sistem $[A, B, C]$ dikatakan positif jika untuk semua syarat awal $x_0 \geq 0$ dan untuk semua fungsi kontrol kontinu *piecewise* u, dengan $u(t) \geq 0$ untuk semua $t \geq 0$, maka fungsi keadaan dan output adalah positif, yakni $x(t) \geq 0$ dan $y(t) \geq 0$ untuk semua $t \geq 0$".

Masalah kontrol kuadratik linier positif adalah masalah menentukan vektor kontrol $u(t) \in \mathbb{R}^r$, dengan $u(t)$ stabil asimtotik, yang memenuhi sistem positif $[A, B, C]$ dan meminimumkan fungsi biaya kuadratik (2). Laabissi *et al.* (2006) juga menyebutkan bahwa tidak semua teori untuk masalah kontrol kuadratik linier klasik berlaku untuk masalah kontrol kuadratik linier positif. Sehingga studi mengenai sistem positif selalu dilakukan secara tersendiri tanpa mengaitkan dengan sistem klasik. Kaczorek (1999) menunjukkan bahwa ketercapaian dan keterkontrolan sistem kontrol linier positif tidak invarian terhadap feedback keadaan. Selain itu, syarat cukup untuk eksistensi dari realisasi positif dengan sejumlah tunda fungsi transfer juga dikemukakan oleh Kaczorek (2006). De Leenheer *et al.* (2001) mengajukan syarat perlu dan cukup untuk menyelesaikan masalah kestabilan sistem linier positif dengan menggunakan feedback keadaan affin. Baru-baru ini, Kaczorek (2007)

mengemukakan kriteria uji terbaru untuk ketercapaian dan keterobservasian sistem diskrit linier positif. Uji ini tidak memerlukan pemeriksaan syarat rank dari matriks ketercapaian dan matriks keterobservasian. Selain itu, perilaku asimtotik dari trajektori sistem positif kontinu juga dikemukakan oleh Santesso *et al*. (2007) dengan memperkenalkan beberapa konsep baru mengenai teori matriks nonnegatif dan matriks Metzler.

2.4. Sistem Singular Kontinu Invarian Waktu

Sebagai perumuman dari sistem kontrol linier klasik (1), perhatikan sistem berikut ini:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{5}$$

dimana $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan diperbolehkan singular. Jika matriks E nonsingular maka sistem (2) dapat direduksi menjadi sistem kontrol linier klasik (1). Sistem kontrol linier (2) sering disebut sebagai sistem singular kontinu invarian waktu, dan aplikasinya dalam ilmu rekayasa pertama kali diperkenalkan oleh Verghese *et al*., (1981). Berbeda dengan sistem kontrol linier klasik yang mempunyai penyelesaian tunggal untuk setiap syarat awal, sistem singular mungkin mempunyai banyak penyelesaian, bahkan mungkin pula tidak memiliki penyelesaian sama sekali. Sistem kontrol singular mempunyai penyelesaian tunggal jika $\det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap syarat awal admisibel (Verghese *et al*., 1981).

Beberapa laporan terbaru yang mempertimbangkan kepositifan dari sistem kontrol singular (2) telah dikemukakan oleh beberapa pengarang. Zhang *et al*. (2002) mengemukakan tentang realisasi positif dari sistem singular kontinu berdasarkan persamaan aljabar Riccati diperumum. Herrero *et al*. (2006) mengemukakan syarat cukup yang menjamin eksistensi feedback keadaan sedemikian sehingga sistem lup tertutup adalah nonnegative. Selain itu, Virnik (2006) membuat analisis kestabilan sistem singular kontinu dan diskrit.

Masalah kontrol kuadratik linier terkendala sistem singular dengan berbagai bentuk variannya telah dikemukakan oleh beberapa pengarang, diantaranya Cobb (1983), Katayama *et al*. (1992), Muller (2003), Muhafzan (2006a), Muhafzan *et al*. (2006b), Muhafzan (2008) dan banyak lagi referensi lainnya. Dalam semua literatur yang disebutkan terakhir ini semuanya membicarakan masalah kontrol kuadratik linier terkendala sistem

singular (2) yang bersifat umum dan tidak meninjau secara khusus masalah kepositifannya, padahal masalah kepositifan ini sangat penting baik dari sisi teori maupun dari sisi aplikasinya. Dari sisi teorinya, tidak semua teori masalah kontrol kuadratik linier umum terkendala sistem singular berlaku untuk masalah kontrol kuadratik linier positif terkendala sistem singular, sebagaimana yang terjadi pada masalah kontrol kuadratik linier positif klasik. Oleh karena itu masalah kontrol kuadratik linier positif terkendala sistem singular memerlukan perlakuan secara khusus dan terpisah dari masalah kontrol kuadratik linier umum terkendala sistem singular, dan ini merupakan fenomena baru dalam teori optimisasi dan kontrol.

III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan syarat cukup yang menjamin eksistensi dan ketunggalan pengontrol positif stabil.

3.2. Manfaat Penelitian

Pada dasarnya, masalah yang dikemukakan dalam penelitian ini merupakan model matematika yang muncul dalam pemodelan permasalahn nyata dalam rekayasa, bologi, ekonomi dan bidang-bidang lainnya. Jadi, penelitian ini sangat bermanfaat dalam mendukung proses pencarian solusi masalah-masalah pemodelan yang modelnya berbentuk masalah optimisasi seperti yang dikemukakan di atas. Selain itu, hasil ini memberikan kontribusi penting dalam matematika terapan, khususnya bidang kontrol optimal.

IV. METODE PENELITIAN

Pada dasarnya penelitian ini merupakan studi kepustakaan untuk memperluas teori yang sudah ada sebelumnya.

Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan pengontrol positif stabil yang dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Definisikan himpunan pasangan keadaan-kontrol admisibel untuk masalah kontrol

optimal kuadratik linier positif untuk sistem singular, dan buktikan bahwa himpunan ini merupakan suatu ruang vektor.

2. Gunakan metoda faktorisasi nilai singular untuk mendapatkan suatu sistem kontrol linier klasik positif yang ekivalen terbatas dengan sistem singular positif.
3. Dengan menggunakan hasil pada langkah 2 akan diperoleh suatu masalah kontrol kuadratik linier klasik positif yang baru.
4. Definisikan himpunan pasangan keadaan-kontrol admisibel untuk masalah kontrol optimal kuadratik linier positif pada langkah 3, dan buktikan bahwa himpunan ini juga merupakan suatu ruang vektor.
5. Konstruksi suatu transformasi linier bijektif yang menunjukkan bahwa masalah kontrol kuadratik linier positif pada langkah 3 ekivalen dengan masalah kontrol kuadratik linier positif terkendala sistem singular semula. Sifat bijektif pada langkah ini disajikan dalam suatu lemma dan perlu dibuktikan secara rinci.
6. Dapatkan pengontrol optimal positif stabil untuk masalah kontrol kuadratik linier positif pada langkah 3 dengan menggunakan metoda yang dikemukakan oleh Laabissi (2006).
7. Subtitusikan pengontrol positif stabil pada langkah 6 ke dalam transformasi linier bijektif pada langkah 5 untuk mendapatkan pengontrol optimal positif stabil dari masalah kontrol kuadratik linier positif untuk sistem singular invarian waktu semula.
8. Sajikan hasil-hasil ini ke dalam suatu teorema yang menjamin eksistensi pengontrol optimal positif stabil dari masalah kontrol kuadratik linier terkendala sistem singular invarian waktu semula.
9. Mengkonstruksi program komputer dalam bahasa Matlab untuk menguji validitas pengontrol optimal untuk kasus-kasus sederhana.

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum sampai kepada pembahasan, terlebih dahulu akan disajikan beberapa fakta yang berguna dalam rangka mendapatkan hasil utama. Teorema berikut merupakan alat penting dalam aljabar linier yang mendekomposisikan suatu matriks berdasarkan nilai-nilai singularnya, dan sangat populer disebut teorema Dekomposisi Nilai Singular (SVD).

Teorema 5.1 *Jika* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *maka terdapat matriks orthogonal* $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dan suatu matriks orthogonal* $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *sedemikian sehingga*

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V'$$

dimana $\Sigma = \text{diag}\,(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ *dengan* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$.

Bilangan $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ bersama-sama dengan $\sigma_{p+1} = 0, \dots, \sigma_n = 0$ disebut nilai singular dari matriks A yang merupakan akar positif dari nilai eigen matriks $A'A$.

Definisi 5.2 *Dua sistem* (E, A, B, C, D) *dan* $(\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$ *dikatakan sistem ekuivalen terbatas, ditulis* $(E, A, B, C, D) \sim (\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$, *jika ada matriks nonsingular* $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *dan* $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sedemikian sehingga*

$$MEN = \bar{E}, MAN = \bar{A}, MB = \bar{B}, dan\ CN = \bar{C}.$$

Definisi 5.3 *Dua masalah kontrol optimal dikatakan ekuivalen jika ada suatu bijeksi antara himpunan pasangan kontrol-keadaan admisibel dari kedua masalah, dan biaya dari kedua masalah kontrol optimal bernilai sama.*

Definisi 5.3 memperlihatkan sifat refleksif, simetri dan transitif dari suatu relasi ekuivalen, sehingga dua masalah kontrol optimal akan mempunyai penyelesaian, ketunggalan penyelesaian dan biaya optimal yang sama. Sifat ini memperlihatkan bahwa untuk menyelesaiakan suatu masalah kontrol optimal dapat dilakukan dengan menyelesaikan masalah kontrol optimal yang ekivalen terbatas dengannya.

5.1 Konstruksi Ke dalam Bentuk Ekuivalen

Misalkan $rank\ E = p = \min\{m, n\}$, maka menurut teorema SVD 5.1 ada matriks nonsingular $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ dan $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$MEN = \begin{pmatrix} I_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Selanjutnya misalkan

$$MAN = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ MB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},\ CN = (C_1 \quad C_1) \text{ dan } N^{-1}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

dimana $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)\times r}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{q\times(n-p)}$, $x_1 \in \mathbb{R}^p$ dan $x_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)}$. Oleh karena itu, untuk suatu keadaan awal admisibel $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sistem (3) ekuivalen terbatas dengan sistem berikut ini:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \;\; x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^p \\ 0 &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{8}$$

dimana $x_{10} = (I_p \quad \mathbf{0})Mx_0$. Dengan asumsi bahwa matriks A_{22} punya invers, maka persamaan kedua dari persamaan (10) dapat ditulis menjadi

$$x_2(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1(t) - A_{22}^{-1}B_2u(t). \tag{9}$$

Dengan mensubtitusikan $x_2(t)$ kedalam persamaan pertama dan ketiga dari persamaan (10), maka diperoleh suatu masalah kontrol kuadratik linier standar sebagai berikut:

$$\Omega_1: \quad \boxed{\begin{array}{ll} \underset{(u,x_1)}{\text{minimum}} & J_1(x_0,u) \\ \text{kendala} & \dot{x}_1(t) = \bar{A}x_1(t) + \bar{B}u(t), \quad x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^p \\ & y(t) = \bar{C}x_1(t) + \bar{D}u(t) \end{array}} \begin{array}{r} (10) \\ \\ (11) \end{array}$$

dimana

$$J_1(x_0,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u(t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt,$$

$$\bar{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},$$

$$\bar{B} = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$

$$\bar{C} = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$\bar{D} = D - C_2A_{22}^{-1}B_2$$

$$Q_{11} = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})'(C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})$$

$$Q_{12} = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})'(D - C_2A_{22}^{-1}B_2)$$

$$Q_{22} = (D - C_2A_{22}^{-1}A_{21})'(D - C_2A_{22}^{-1}B_2)$$

Selanjutnya definisikan himpunan pasangan kontrol-keadaan dari masalah Ω_1 sebagai berikut:

$$\mathcal{A}_{ad}^1 = \{(u,x_1) |\, u \in C_{\mathrm{p}}^+[\mathbb{R}^r],\; x_1 \in C_{\mathrm{p}}^+[\mathbb{R}^p] \text{ memenuhi (11) dan } J_1(u(.),x_{10}) < \infty\}$$

Berdasarkan definisi 5.2 dengan mudah dapat dibuktikan bahwa Ω_1 ekuivalen terbatas dengan Ω.

5.2 Eksistensi dan Ketunggalan Kontrol Optimal

Dalam bagian 5.1 telah dikonstruksi suatu masalah kontrol kuadratik linier yang ekuivalen dengan masalah kontrol kuadratik linier semula. Oleh karena itu untuk mengkonstruksi syarat eksistensi dan ketunggalan kontrol optimal masalah Ω, cukup menggunakan syarat eksistensi dan ketunggalan kontrol optimal masalah Ω_1 seperti yang diberikan dalam bagian 2.2, yaitu jika $Q_{22} > 0$, pasangan $\left(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'},\ \bar{A} - \bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'}\right)$ terdeteksi dan pasangan $(\bar{A},\ \bar{B})$ stabil asimtotik, maka Ω_1 mempunyai kontrol optimal tunggal u^* yang diberikan oleh

$$u^* = -Lx_1^*, \tag{12}$$

dimana keadaan x_1^* adalah solusi persamaan diferensial

$$\dot{x}_1(t) = (\bar{A} - \bar{B}L)x_1(t), x_1(0) = x_{10} \tag{13}$$

dengan $L = Q_{22}^{-1}\left(Q_{12}^{'} + \bar{B}^{'}P\right)$, dan P adalah solusi semidefinit positif tunggal dari persamaan aljabar Riccati

$$\bar{A}^{'}P + P\bar{A} + Q_{11} - (P\bar{B} + Q_{12})Q_{22}^{-1}(P\bar{B} + Q_{12})^{'} = 0 \tag{14}$$

dimana $Re\,\lambda < 0$ untuk setiap nilai eigen λ dari matriks $\bar{A} - \bar{B}L$. Tetapi mungkin $Q_{22} \geq 0$, jadi perlu dibuat syarat perlu dan cukup yang menjamin agar $Q_{22} > 0$. Selain itu, diperlukan juga membuat syarat perlu dan cukup agar pasangan $(\bar{A},\ \bar{B})$ stabil asimtotik dan pasangan $\left(\bar{A} - \bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'},\ Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'}\right)$ terdeteksi.

Teorema 5.4 *Pernyataan berikut ekuivalen*:

(i). $Q_{22} > 0$

(ii). $rank \begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix} = p + r$

(iii). $rank \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E & \mathbf{0} \\ E & A & B \\ \mathbf{0} & C & D \end{pmatrix} = 3p + r$ (15)

Bukti:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Karena $Q_{22} = (D - C_2A_{22}^{-1}A_{21})^{'}(D - C_2A_{22}^{-1}B_2) \in \mathbb{R}^{r\times r}$, maka

$$Q_{22} > 0 \Leftrightarrow \text{rank}\,(D - C_2A_{22}^{-1}A_{21}) = r$$

Karena matriks $\begin{pmatrix} A_{22}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}$ non singular, maka

$$rank\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix} = rank\left[\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{22}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= rank\begin{pmatrix} I_p & B_2 \\ C_2A_{22}^{-1} & D \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} I_p & \mathbf{0} \\ C_2A_{22}^{-1} & D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} I_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{pmatrix} = p + rank\,(D - C_2A_{22}^{-1}B_2)$$

$$= p + r.$$

(ii) ⇔ (iii) Dengan mudah dapat diperiksa bahwa

$$rank\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E & \mathbf{0} \\ E & A & B \\ \mathbf{0} & C & D \end{pmatrix} = rank\left[\begin{pmatrix} M & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E & \mathbf{0} \\ E & A & B \\ \mathbf{0} & C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= rank\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & ME & \mathbf{0} \\ ME & MA & MB \\ \mathbf{0} & C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= rank\begin{pmatrix} \mathbf{0} & MEN & \mathbf{0} \\ MEN & MAN & MB \\ \mathbf{0} & CN & D \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_p & \mathbf{0} & A_{11} & A_{12} & B_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{22} & B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_2 & D \end{pmatrix}$$

$$= 2p + rank\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix}$$

$$= 3p + r. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.5 *Pasangan* $(\bar{A},\ \bar{B})$ *dapat distabilkan jika dan hanya jika*

$$rank\,(A - \lambda E \quad B) = n, \tag{16}$$

untuk setiap λ *dengan* $Re\ \lambda \geq 0$.

Bukti:

Dalam Anderson dan Moore (1990) disebutkan bahwa pasangan $(\bar{A} \quad \bar{B})$ stabil simtotik

jika dan hanya jika $rank\left(\bar{A}-\lambda I_p \quad \bar{B}\right)=p$. Akibatnya

$$
\begin{aligned}
rank\,(A-\lambda E \quad B) &= rank\left[M(A-\lambda E \quad B)\begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}\right] \\
&= rank\,(MAN-\lambda MEN \quad MB) \\
&= rank\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I_p & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \end{pmatrix} \\
&= rank\begin{pmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}-\lambda I_p & A_{12} & B_1-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ A_{21}-A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22} & B_2-A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} \end{pmatrix} \\
&= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ \mathbf{0} & A_{22} & B_2-A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} \end{pmatrix} \\
&= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\lambda I_p & \bar{B} & A_{12} \\ \mathbf{0} & B_2-A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\
&= rank\left(\bar{A}-\lambda I_p \quad \bar{B}\right)+rank(A_{22}) \\
&= p+(n-p)=n. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 5.6 *Pasangan* $\left(\bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'},\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'}\right)$ *terdeteksi jika dan hanya jika*

$$rank\begin{pmatrix} A-\lambda E & B \\ C & D \end{pmatrix}=n+r, \tag{17}$$

untuk setiap λ *dengan* $Re\ \lambda \geq 0$.

Bukti:

Dalam Anderson dan Moore (1990) disebutkan bahwa pasangan

$$\left(\bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'},\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'}\right)$$

terdeteksi jika dan hanya jika

$$rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'}-\lambda I_p \\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{'} \end{pmatrix}=p,$$

untuk semua λ dengan $Re\ \lambda \geq 0$.

Akibatnya

$$
\begin{aligned}
rank\begin{pmatrix} A-\lambda E & B \\ C & D \end{pmatrix} &= rank\begin{pmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-\lambda E & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \\
&= rank\begin{pmatrix} MAN-\lambda MEN & MB \\ CN & D \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= rank\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I_p & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I_p & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}-\lambda I_p & A_{12} & B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ A_{21}-A_{22}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22} & B_2-A_{22}A_{22}^{-1}B_2 \\ C_1-C_2A_{22}^{-1}A_{21} & C_2 & D-C_2A_{22}^{-1}A_{21} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \\ \bar{C} & C_2 & \bar{D} \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ \bar{C} & C_2 & \bar{D} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ \bar{C}-\bar{D}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & C_2 & \bar{D} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{C}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{D}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ \bar{C}-\bar{D}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & C_2 & \bar{D} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ \bar{C}'\bar{C}-\bar{C}'\bar{D}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & \bar{C}C_2' & \bar{C}'\bar{D} \\ \bar{D}'\bar{C}-\bar{D}'\bar{D}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & \bar{D}'C_2 & \bar{D}'\bar{D} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & \bar{C}C_2' & \bar{C}'\bar{D} \\ Q_{12}'-Q_{22}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & \bar{D}'C_2 & \bar{D}'\bar{D} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p & A_{12} & \bar{B} \\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & \bar{C}C_2' & Q_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{D}'C_2 & Q_{22} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_{22} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} \bar{A}-\bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}'-\lambda I_p \\ Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}' \end{pmatrix} + rank(Q_{22}) + rank(A_{22})$$

$$= p + r + n - p = n + r. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.7 *Jika sistem singular* $[E, A, B, C, D]$ *dalam* (3) *terkontrol impuls dan memenuhi* (15), (16) dan (17), *maka* Ω *mempunyai kontrol optimal tunggal*.

Bukti:

Misalkan hipotesis teorema 5.7 berlaku. Maka berdasarkan syarat eksistensi dan ketunggalan kontrol optimal masalah Ω_1 seperti yang diberikan dalam bagian 2.2, Ω_2 mempunyai kontrol optimal tunggal u^*, dimana u^* memenuhi persamaan (15), (16) dan (17). Dari transformasi (7) dan relasi (9) diperoleh

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x_1^*(t) - A_{22}^{-1}B_2u^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & \mathbf{0} \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & -A_{22}^{-1}B_2 \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ -Lx_1^*(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ -A_{22}^{-1}A_{21} + A_{22}^{-1}B_2L \\ \hline -L \end{pmatrix} x_1^*(t). \quad \blacksquare$$

VI. MATLAB CODE

This CODE is to find the optimal control-state pair of the LQ control problem subject to singular continuous time invariant

```
==============================================================
%Input the matrices E,A,B,C,D of appropriate dimension
%Observe the rank(E), the number of column of B and the number of column of C
n = size(E,1)
p=rank(E)
r=size(B,2)
q=size(C,1)
%Determination of Singular value Decomposition of the Matrix E
[M,S,N] = svd(E)
MEN=M*E*N
MAN=M*A*N
A11 = MAN(1:p,1:p)
A12 = MAN(1:p,(p+1):n)
A21 = MAN((p+1):n,1:p)
A22 = MAN((p+1):n,(p+1):n)
MB=M*B
```

```
B1=MB(1:p,1:r)
B2=MB(p+1:n,1:r)
CN=C*N
C1=CN(1:q,1:p)
C2=CN(1:q,(p+1):n)
A22B2=[A22 B2]
%Verify whether rank [A22 B2]=number of row of [A22 B2]
%If yes, to becontinued
%If no, to be stop (because the sistem uncontrollable impulse)
s1 = size(A22B2,1)
s=rank([A22 B2])
%Check singularity(positive definite) of the transformed system
%If test=test1, test2=test3 then continue
test=rank([A22 B2;C2 D])
test1=n-p+r
test2=rank([zeros(n,n) E zeros(n,r);E A B;zeros(q,n) C D])
test3=n+p+r
%Choose the matrix W as follows:
W=null([A22 B2])
Check=[A22 B2]*W
W1=W(1:n-p,1:r)
W2=W(n-p+1:n-p+r,1:r)
%Determine the generalized invers of [A22 B2]
PseudoinversA22B2=pinv([A22 B2])
Abar=A11-[A12 B1]*PseudoinversA22B2*A21
Bbar=[A12 B1]*W
Cbar=C1-[C2 D]*PseudoinversA22B2*A21
Dbar=[C2 D]*W
Q11=Cbar'*Cbar
detQ11=det(Q11)
Q12=Cbar'*Dbar
Q22=Dbar'*Dbar
detQ22=det(Q22)
Q=[Q11 Q12;Q12' Q22]
detQ=det(Q)
%Test for imlementation of LQR tools
%det(Q11-Q12*inv(Q22)*transpose(Q12))=0
det(Q11-Q12*inv(Q22)*Q12')
c_stab=eig(Abar)
%stability1=p
%stability2=n
stability1=rank([Abar-11*eye(p) Bbar])
stability2=rank([A-11*E  B])
d_detect=eig(Abar-Bbar*inv(Q22)*Q12')
%detectability1=p
%detectability2=n+r
```

```
detectability1=rank([Abar-Bbar*inv(Q22)*Q12'-3.7096*eye(p);Q11-
Q12*inv(Q22)*Q12'])
detectability2=rank([A-3.7096*E  B;C D])
[L,P,e] = lqr(Abar,Bbar,Q11,Q22,Q12)
detP=det(P)
ARE=Abar'*P+P*Abar+Q11-(P*Bbar+Q12)*inv(Q22)*(P*Bbar+Q12)'
incondition=[eye(p) zeros(p,n-p)]*M*[1;2;0;0]
koef=Abar-Bbar*L
lambda = eig(koef)
[x11,x12] = dsolve('Dx11=-9.3044*x11-9.1776*x12, Dx12 =4.7518*x11+4.0852*x12',
'x11(0) = 1, x12(0) = 2')
```

Simplify these results by the following way:

```
digits(6)
simplify(vpa(x11))
simplify(vpa(x12))
v=-L*[x11;x12]
v1=transpose(v)
Objective=int([x11 x12 v1]*Q*[x11;x12;v],0,inf)
Joptimum=eval(Objective)
x1=N*[eye(p);gamma1-W1*L]*[x11;x12]
u1=(gamma2-W2*L)*[x11;x12]
%Simplify these results by the following way:
digits(6)
x=vpa(x1)
u=vpa(u1)
%============Construction into Feedback form
K2=[1 0;3 1]
r1=rank(A22+B2*K2)
r2=det(A22+B2*K2)
K1=(gamma2-W2*L)-K2*(gamma1-W1*L)
controlfeedback=K1*[x11;x12]+K2*x2
```

VII. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil yang diperoleh dalam bagian V dapat disimpulkan bahwa terdapat pasangan kontrol-keadaan optimal $(u^*, x^*) \in \mathcal{A}_{ad}$ yang memenuhi

$$J(u^*, x_0) = \min_{(u(.),x(.))\in\mathcal{A}_{ad}} J(u(.), x_0),$$

dengan (u^*, x^*) diberikan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ -A_{22}^{-1}A_{21} + A_{22}^{-1}B_2L \\ \hline -L \end{pmatrix} x_1^*(t).$$

Ada beberapa perluasan dari masalah yang dikemukakan dalam penelitian ini, yaitu

1. Konstrain dalam penelitian ini adalah sistem singular kontinu invarian waktu. Bagaimana bentuk perluasan dari teori yang diajukan dalam penelitian ini, jika konstrain merupakan sistem singular diskrit.
2. Bagaimana pula bentuk perluasan tersebut jika konstrain merupakan sistem singular varian waktu

Dua hal ini perlu kami sarankan untuk pengembangan penelitian di masa datang.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, B.D.O, Moore, J.B. (1990). Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Prentice Hall. New Jersey

Athans, M. and Falb, P.L. (1966). Optimal Control Theory. McGraw Hill. New York

Chen, C. T. (1999). Linear System Theory and Design. Oxford University Press. New York.

Cobb, D. (1983). Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation. IEEE Transaction on Automatic Control. 28(5): 601-611.

De Leenheer, P., Aeyels, D. (2001). Stabilization of Positive Linear Systems. Systems & Control Letters. 44: 259-271

Herrero, A., Ramirez, A., Thome, N. (2006). Nonnegativity of Control Singular Systems via State Feedbacks. Lecture Note on Control and Information Science. 341: 25-32. Springer Verlag. Berlin Heidelberg

Kaczorek, T. (1999). Reachability and Controllability of Positive Linear Systems with State feedbacks. Proceedings of the 7th Mediteranean Conference on Control and Automation. Israel. 689-694

Kaczorek, T. (2006). A Realization Problem for Positive Continuous Time Systems with Reduced Number of Delays. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 16(3): 325-331

Kaczorek, T. (2007). New Reachability and Observability Test for Positive Linear Discrete Time Systems. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. 55(1): 19-21

Katayama, T. and Minamino, K. (1992). Linear Quadratic Regulator and Spectral Factorization for Continuous Time Descriptor System. Proceeding of the 31st IEEE Conference on Decision & Control. 967-972. Arizona.

Laabissi, M., Winkin, J.J., Beauthier, Ch. (2006). On the Positive LQ Problem for Linear Continuous Time Systems. Lecture Note on Control and Information Science. 341:295-302. Springer Verlag. Berlin Heidelberg

Muhafzan (2006a). The Existence of Optimal Control for Nonregular Descriptor of LQR Problem. *Jurnal Ilmiah Mat Stat.* Terakreditasi No. 23a/DIKTI/Kep/2004. 6(1): 74-83

Muhafzan, Malik Hj. Abu Hassan, Leong Wah June (2006b), On the Singular LQ Control Problem For Nonregular Implicit System, Punjab University Journal of Mathematics, 38:55-69

Muller, P.C. (2003). *Optimal Control of proper and Nonproper Descriptor Systems.* Archive of Applied Mechanics. 72: 875-884.

Santesso, P., Valcher, M. E. (2007). On the Zero Pattern Properties and Asymptotic Behavior of Continuous Time Positive Systems Trajectories. Linear Algebra and Its Application. 425(2): 283-302

Verghese, G. C., Levy, B. C., Kailath, T. (1981). A Generalized State Space for Singular Systems. IEEE Transaction on Automatic Control. 26(4): 811-831.

Virnik, E. (2006). Stability Analysis of Positive Descriptor Systems. Research Report. DFG Research Center MATHEON. Berlin

Zhang, L., Lam, J., Xu, S. (2002). On Positive Realness of Descriptor Systems. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 49(3): 401-407

LAMPIRAN

PERSONALIA PENELITI

A. Ketua Peneliti

I. Identitas Pribadi

1.	Nama Lengkap	Muhafzan, Ph.D
2.	N I P	132 046 381
3.	Fakultas	MIPA
4.	Jurusan	Matematika
5.	Tempat/Tanggal Lahir	Bengkalis / 2 Juni 1967
6.	Jenis Kelamin	Laki-laki
7.	Bidang Ilmu/Spesifikasi	Matematika/Matematika Terapan (Opimisasi)
8.	Pangkat/ Golongan	Penata TK. I / IIId
9.	Alamat Rumah	Jl. Sawahan Dalam IV No. 26, Padang
	HP	08126868108
	e-mail	muhafzan@fmipa.unand.ac.id
10.	Alamat Kantor	Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Andalas Kampus UNAND Limau Manis – PADANG 25163
	Telp/Fax	(0751)73224 / (0751)73118
	e-mail	math@fmipa.unand.ac.id

II. Riwayat Pendidikan

NO	TINGKAT	NAMA LEMBAGA PENDIDIKAN	JURUSAN	IJAZAH TH.	TEMPAT
1.	Sarjana	Universitas Riau (UNRI)	Matematika	1992	Pekanbaru
2.	Pasca Sarjana (S2)	Institut Teknologi Bandung (ITB)	Matematika Terapan	1999	Bandung
3.	Doktor (S3)	Universiti Putra Malaysia (UPM)	Matematika Terapan	2007	Malaysia

III. Riwayat Penelitian

NO.	JABATAN	JUDUL	KETERANGAN
1	Ketua	Uji Keterkontrolan Sistem Deskriptor Kontinu Bebas Waktu	DANA RUTIN TH. 2000
2	Ketua	Konstruksi Ruang Sasaran Sistem Deskriptor Kontinu	DANA RUTIN 2001
3	Ketua	Rancangan Sistem Pengontrol Pencemaran Udara	PPD-HEDS TH. 2001
4	Ketua	Model Deskriptor Untuk pengontrol Pencemaran Udara	PPD-HEDS TH.2002

IV. Daftar Publikasi yang Relevan

NO.	NAMA	JUDUL	NAMA JURNAL/ VOL. HAL.	TAHUN
1	Muhafzan	Suatu Model Matematika untuk Pengontrol Pencemaran Udara	Jurnal Penelitian Sains dan Teknologi / Vol.9 No. 1: 91-98 (terakreditasi)	2003

2	Muhafzan	The Existence of Optimal Control for Nonregular Descriptor of LQR Problem	Jurnal Ilmiah Mat Stat / Vol. 6, No. 1: 74-83 (Terakreditasi)	2006
3	Muhafzan	Singular LQ Optimization Problem Subject to Generalized State Space Systems	Jurnal Ilmiah Mat Stat / Vol. 7, No. 2: 155-167.	2007
4	Muhafzan, Malik Abu Hassan, Leong Wah June	On the Singular LQ Control Problem For Nonregular Implicit System	Punjab University Journal of Mathematics/Vol. 38:55-69	2006
5	Muhafzan, Malik Abu Hassan, Fudziah Ismail Leong Wah June	On the Sufficient Condition for Solvability of Singular LQR Problem for Descriptor Systems	Proceeding International Conference on Applied Mathematics (ICAM 05)	2005
6	Muhafzan	SDP Approach for Solving LQ Control Problem Subject to Implicit System	Akan terbit	Desember 2009

Padang, 12 November 2010

Muhafzan, Ph.D

B. Anggota Peneliti

I. Identitas Pribadi

1.	Nama Lengkap	DR. Susila Bahri, MSc
2.	N I P	132 046 380
3.	Fakultas	MIPA
4.	Jurusan	Matematika
5.	Tempat/Tanggal Lahir	Padang/3 Maret 1968
6.	Jenis Kelamin	Perempuan
7.	Bidang Ilmu/Spesifikasi	Matematika/Matematika Terapan
8.	Pangkat/ Golongan	Penata/IIIc
9.	Alamat Rumah	Jl. Sawahan III No 5 PADANG
	HP	081363014767
	e-mail	sila68_2000@yahoo.com
10.	Alamat Kantor	Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Andalas Kampus Limau Manis – PADANG 25163
	Telp/Fax	(0751)73224 / (0751)73118
	e-mail	math@fmipa.unand.ac.id

II. Riwayat Pendidikan

NO	TINGKAT	NAMA LEMBAGA PENDIDIKAN	JURUSAN	IJAZAH TH.	TEMPAT

1.	Sarjana	Universitas Sumatera Utara (USU)	Matematika	1991	Medan
2.	Pasca Sarjana (S2)	Universiti Putra Malaysia (UPM)	Matematika Terapan	1998	Malaysia
3.	Doktor (S3)	Universiti Putra Malaysia (UPM)	Matematika Terapan	2004	Malaysia

III. Riwayat Penelitian

NO.	JABATAN	JUDUL	NO. KONTRAK	TAHUN
1	Peneliti	Pemograman Parallel Untuk Menghitung Nilai Akhir Matakuliah Metode Numerik di Jurusan Matematika Unand	089/J.16/PL/DIPA/IV/2005	2005

IV. Daftar Publikasi

NO.	NAMA	JUDUL	NAMA JURNAL/ VOL. HAL.	TAHUN
1	Dr. Susila Bahri, MSc	Penggunaan Message Passing Interface (MPI) Untuk Menghitung Integral Sebuah Fungsi	Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (JUMPA)	2005