

ARTIKEL PENELITIAN DOSEN MUDA

**OPTIMISASI MULTI TUJUAN
DENGAN PETA KENDALI MUTU T² BUATAN**

Oleh :

1. ARRIVAL RINCE PUTRI, S.Si, MT
2. ZULAKMAL, M.Si

Dibiayai oleh Lembaga Penelitian Universitas Andalas
Sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian
Nomor : 088/H.16/PL/DIPA/I/2009

**JURUSAN MATEMATIKA/FAKULTAS MIPA
UNIVERSITAS ANDALAS**

2009

OPTIMISASI MULTI TUJUAN DENGAN PETA KENDALI MUTU T² BUATAN

Arrival Rince Putri¹
Zulakmal²

Department of Mathematic, Andalas University, Padang
arrival@fmipa.unand.ac.id
zulakmal@fmipa.unand.ac.id

Abstrak

Peta T² buatan memperlihatkan tanda-tanda di luar kendali, mengindikasikan adanya perubahan dalam proses. Sebagian metode untuk menginterpretasikan tanda-tanda di luar kendali adalah peta kendali T². Dalam tulisan ini dikembangkan suatu peta kendali untuk perubahan kecil dalam rata-rata proses yang tidak terdeteksi.

Peta ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi dari daerah di dalam dan di luar kendali. *Software* GA_s digunakan untuk mendapatkan nilai dari n, L dan LC_{synt} yang merupakan optimal Pareto.

PENDAHULUAN

Tujuan utama dari peta kendali kualitas adalah untuk mendeteksi perubahan-perubahan dalam proses produksi yang terjadi karena sebab-sebab terusut. Sampel diambil dari proses dan dihitung secara statistik kemudian diplot dalam suatu peta. Jika yang diplot tersebut berada di luar batas kendali maka diasumsikan bahwa ini adalah penyebab terusut dari variasi, asumsikan bahwa terdapat perubahan dalam variabel yang diamati [4]. Ukuran dari performansi peta kendali ini adalah ARL (*Average Run Length*). ARL ini merupakan jumlah rata-rata dari titik (sampel) yang telah diplot. Jika benar-benar terdapat perubahan dalam proses ARL menjadi mungkin minimum. Akan tetapi, jika tidak ada perubahan, ARL harus menjadi maksimum. Supaya mengendalikan perubahan dalam rata-rata proses, peta kendali Shewhart adalah peta kendali yang paling umum dipakai. Akan tetapi performansinya untuk mendeteksi perubahan-perubahan kecil tidak bagus.

Peta univariat buatan (hanya satu variabel yang diamati) diperkenalkan dalam [6] sebagai alternatif untuk memperbaiki performansi peta kendali Shewhart untuk mendeteksi perubahan-perubahan kecil dalam proses. Ini merupakan hasil dari kombinasi peta Shewhart dan peta CRL (peta yang awalnya dirancang untuk mendeteksi kenaikan dalam persentase unit yang cacat). Peta \bar{X} buatan memperlihatkan nilai ARL yang lebih baik untuk mendeteksi perubahan proses, untuk suatu besarnya perubahan, daripada peta kendali \bar{X} . Dalam beberapa kasus, khususnya untuk perubahan yang layak dan besar, peta buatan memberikan performansi yang lebih baik daripada peta kendali EWMA [6]. Peta buatan juga diterapkan untuk memonitor keragaman dari proses [2], dan persentase dari cacat unit suatu proses [7].

Optimisasi multi tujuan terdiri dari optimisasi sebagian fungsi tujuan secara simultan. Dalam banyak kasus, beberapa fungsi tujuan menggambarkan konflik dari kriteria. Dengan jelas, dalam kasus ini tidak ada solusi tunggal yang dapat ditemukan karena semua fungsi tujuan tidak dapat dioptimisasi (maksimum/minimum) tanpa mempertimbangkan efek dari perubahan eksperimen dalam fungsi respon yang lainnya.

Bentuk umum masalah optimisasi dimana n jumlah variabel keputusan, x_j , m pembatas dan p tujuan dapat diformulasikan sebagai berikut :

Tentukan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Memaksimumkan / meminimumkan : $Z = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))$

Kendala : $x \in F$

Dengan $F \subset R^n$, F daerah layak dari solusi ruang R^n dan $Z = z(F) \subset R^p$.

Himpunan F dapat ditulis sebagai $F = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, x_j \leq 0, \forall j\}$, dimana fungsi g_j adalah pembatas. Dalam beberapa kasus, variabel z_j disebut fungsi objektif atau objektif.

Dalam beberapa penerapan Pengendalian Proses Statistika, perlu dirancang suatu peta kendali untuk perubahan kecil dalam rata-rata proses yang tidak terdeteksi, tetapi tetap menjaga performansi yang baik untuk mendeteksi perubahan-perubahan yang layak dan besar. Rancangan ini pertama kali diusulkan oleh Woodall (1985) dan dikenal sebagai rancangan untuk daerah *in-control* dan *out-of-control*. Meskipun ide ini tidak baru, namun cukup sulit untuk merancang suatu peta kendali kualitas yang dapat menyelesaikan masalah ini. Tipe peta kendali ini tidak dapat disesuaikan dan cukup sulit untuk mengoptimalkan suatu masalah.

Peta kendali Shewhart hanya dapat digunakan untuk kasus univariat atau kasus satu variabel. Dalam SPC adakalanya ditemukan kasus yang harus menggunakan variabel lebih dari satu atau biasa disebut dengan kasus multivariat. Pada kasus multivariat, jika data yang digunakan adalah data yang tidak saling berkorelasi, maka data tersebut dapat dibagi menjadi dua buah data univariat dan dibuatkan peta kendali untuk setiap variabelnya. Tetapi jika data saling berkorelasi, maka dapat dibuatkan peta kendali multivariat. Salah satunya adalah dengan menggunakan statistic T^2 Hotelling untuk mengukur variabilitas vector meannya. Peta kendali ini dikenal dengan peta kendali T^2 Hotelling.

MENDEFINISIKAN PETA KENDALI T^2 BUATAN

Peta kendali T^2 buatan adalah peta untuk memonitor kesimultanan dua atau lebih karakteristik kualitas. Teknik ini pertama kali digunakan untuk mengendalikan sebagian variabel yang simultan. Terdiri dari dua sub peta, yaitu sub peta T^2 dan sub peta CRL. Sub peta T^2 mempunyai batas kendali unik, LC_{synt} . Sub peta CRL mempunyai batas kendali bawah, yaitu L , dimana $L \geq 1$. Nilai dari LC_{synt} adalah kriteria untuk mengelompokkan sampel yang *conforming* atau *non conforming*. Nilai dari L adalah kriteria untuk memutuskan apakah proses berada dalam kendali atau di luar kendali.

Peta kendali CRL pertama diusulkan oleh [1]. Dalam peta T^2 buatan nilai CRL didefinisikan sebagai nomor sampel yang diperiksa antara dua sampel dikelompokkan sebagai *non conforming*, termasuk sampel *non conforming*

terakhir. Konsep CRL mengasumsikan bahwa dalam $t = 0$ titik berada di atas batas LC_{synt} (sampel *non conforming* dalam $t = 0$). Karakteristik ini disebut juga dengan langkah awal, sangat penting untuk performansi peta buatan. Ketika asumsi ini dihilangkan performansi peta buatan menjadi buruk [3]. Langkah-langkah dari peta T^2 buatan adalah sebagai berikut :

1. Sampel berukuran n diambil dari proses pada waktu i dan vektor rata-rata sampel dihitung. $\bar{X}_i^T = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_p)$. Nilai statistik T_i^2 dihitung.
2. Nilai statistik T_i^2 diplot dalam sub peta T^2 . Jika $T_i^2 \leq LC_{synt}$, maka sampel dikelompokkan sebagai *conforming*, dan kembali ke langkah 1. Sedangkan, jika $T_i^2 > LC_{synt}$, maka sampel dikelompokkan sebagai *non conforming*, dan lanjutkan ke langkah berikutnya.
3. Hitung banyaknya sampel antara sampel *non conforming* dan yang terakhir. Bilangan ini disebut dengan sampel CRL dan diplot dalam sub peta CRL.
4. Jika $CRL > L$, maka kesimpulannya adalah proses dalam keadaan terkendali, dan langkah pengendalian dimulai kembali pada langkah 1. Jika $CRL \leq L$, maka proses dianggap tidak terkendali.
5. Tanda-tanda tidak terkendali diusut. Jika tidak ditemukan penyebab khusus, dianggap sebagai tanda bahaya palsu, maka kembali ke langkah 1. Oleh karena itu penyebab khusus harus dihilangkan.

MENENTUKAN NILAI ARL

Dua nilai ARL sangat penting untuk merancang peta T^2 buatan. ARL dalam kendali [$ARL_{S-T}(d=0)$] dan di luar kendali [$ARL_{S-T}(d \neq 0)$]. Nilai ARL dalam kendali diseleksi dari perhitungan frekuensi tanda bahaya palsu. Sedangkan nilai ARL di luar kendali merupakan rata-rata vektor *magnitude* d . Chen dan Huang (2005) memberikan nilai *magnitude* d untuk peta buatan, yaitu :

$$ARL_d(d) = E[ARL_{CRL}] * E[CRL] = \frac{1}{1 - (1 - q)^L} * \frac{1}{q} \quad (1)$$

dimana q adalah peluang dari sampel *non conforming*.
ARL dari peta T^2 buatan adalah:

$$ARL_{S-T}(d=0) = ARL_{CRL}(d | LC_{synt}, L) * ARL_{T^2}(d | LC_{synt}) = \frac{1}{1 - (1 - q_0)^L} * \frac{1}{q_0} \quad (2)$$

dimana $q_0 = P(T_i^2 > LC_{synt})$.

Berdasarkan (1), jika $d \neq 0$, maka nilai dari $ARL_{S-T}(d \neq 0)$ adalah :

$$ARL_{S-T}(d \neq 0) = ARL_{CRL}(d | LC_{synt}, L) * ARL_{T^2}(d | LC_{synt}) = \frac{1}{1 - (1 - q_d)^L} * \frac{1}{q_d} \quad (3)$$

dimana $q_d = 1 - \beta = 1 - P(T_i^2 > LC_{synt})$

MENENTUKAN OPTIMAL PARETO

Optimal Pareto adalah himpunan penyelesaian *non-dominated* dari masalah optimisasi multi tujuan. Didefinisikan dua nilai, yaitu Z_1 sebagai nilai tertinggi dan Z_2 sebagai nilai terendah.

$$\begin{aligned}
Z_1 &= ARL(d=0) + ARL(d=A) = \\
&= ARL_{CRL}(d=0|LC_{synt}, L) * ARL_{T^2}(d=0|LC_{synt}) + ARL_{CRL}(d=A|LC_{synt}, L) * ARL_{T^2}(d=A|LC_{synt}) \\
&= \frac{1}{1-(1-q_0)^L} * \frac{1}{q_0} + \frac{1}{1-(1-q_{d=A})^L} * \frac{1}{q_{d=A}} = \\
&= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2^{p/2} \Gamma(p/2)} \int_0^{LC_{synt}} y^{\frac{p}{2}-1} e^{-y/2} dy \right)^L} * \frac{1}{\frac{1}{2^{p/2} \Gamma(p/2)} \int_0^x y^{\frac{p}{2}-1} e^{-y/2} dy} + \frac{1}{1-(1-q_{d=A})^L} * \frac{1}{q_{d=A}} \\
Z_2 &= ARL(d=B) = ARL_{CRL}(d=B|LC_{synt}, L) * ARL_{T^2}(d=B|LC_{synt}) = \\
&= \frac{1}{\left(e^{\frac{-\lambda}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1/2n.d_B)^j}{j!} * \frac{1}{2^{p/2+j} \Gamma(p/2+j)} \int_0^{LC_{synt}} y^{p/2+j-1} e^{-y/2} dy \right)^L} \\
&= \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{-\lambda}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1/2n.d_B)^j}{j!} * \frac{1}{2^{p/2+j} \Gamma(p/2+j)} \int_0^{LC_{synt}} y^{p/2+j-1} e^{-y/2} dy \right)^L}
\end{aligned}$$

ANALISIS CONTOH PENERAPAN

Suatu proses produksi memerlukan pengamatan dengan menggunakan peta kendali mutu T^2 buatan. Sampel yang diambil berukuran 10 ($n=10$). Perubahan kecil dari $A=0.25$ tidak mungkin dapat dideteksi, oleh karena itu performansi maksimum yang diinginkan untuk perubahan besar dari $B=1.5$. *Software* GA_s digunakan dalam menentukan penyelesaian masalah optimisasi multiobjektif. Setelah optimal Pareto ditemukan, dipilih satu dari solusi-solusi optimal tersebut. Salah satu solusi tersebut dalam kasus ini didapatkan $n=10$, $CRL=2$ dan $LC_{synt}=3.5$. Performansi yang lainnya adalah : $ARL(d=0)=2309498$, $ARL(d=A)=43868$ dan $ARL(d=B)=1.13$.

Berdasarkan hasil tersebut, tidak mungkin untuk mendeteksi perubahan-perubahan yang kecil dimana $d=0.25$, salah satu dari tujuan optimisasi. Di sisi lain, peta kendali buatan akan mendeteksi perubahan-perubahan $d \geq 1.5$ dengan cepat, sebagai tujuan kedua dari masalah optimisasi di atas.

KESIMPULAN

Dalam tulisan ini dirancang suatu peta kendali baru, peta kendali T^2 buatan. Peta ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi dari daerah di dalam dan di luar kendali. *Software* GA_s digunakan untuk mendapatkan optimal Pareto.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bourke, P, 1991, "Detecting a Shift in Fraction Non Conforming Using Run Length Control Chart with 100% Inspection", *Journal of Quality Technology*, 32.
- [2] Chen, F. L. & Huang, 2005, "A Synthetic Control Chart for Monitoring Process Dispersion with Sample Standard Deviation", *Computers & Industrial Engineering*, 49(2).
- [3] Davis, R. B. & Woodall, 2002, "Evaluating and Improving the Synthetic Control Chart", *Journal of Quality Technology*, 34(2).
- [4] Montgomery, D. C, 2002, *Introduction to Statistical Quality Control*, John Willey & Sons, Inc, New York.
- [5] Woodall, W. H, 1985, *The Statistical Design of Quality Control Chart*, The Statistician.
- [6] Wu, Z. & Spedding, T. A, 2000, "A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in Process Mean", *Journal of Quality Technology*, 32(1).
- [7] Wu, Z., Yeo, S. H. & Spedding, T. A, 2001, "A Synthetic Control Chart for Detecting Fraction Non Conforming Increases", *Journal of Quality Technology*, 33(1).

Evaluation
PDF Creator Plus
COPYRIGHT