MENENTUKAN JARAK SUATU SISTEM TERKONTROL DENGAN SISTEM TAK TERKONTROL DENGAN MENGGUNAKAN NILAI-NILAI SINGULAR DARI MATRIKS KETERKONTROLAN

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

MARVITA SARI

05 134 002

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2009

ABSTRAK

Suatu sistem linier $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ dikatakan terkontrol jika rank dari matriks keterkontrolan sistem tersebut adalah n. Tujuan utama dari skripsi ini adalah untuk menentukan jarak terdekat antara suatu sistem terkontrol dengan sistem tak terkontrol yang dinotasikan dengan $\mu(A, B)$. Nilai-nilai singular dari matriks keterkontrolan digunakan untuk mencapai tujuan tersebut. Hasil-hasil memperlihatkan bahwa jika jarak yang diperoleh kecil, maka sistem terkontrol (A, B) cukup dekat dengan sistem yang tak terkontrol.

Kata kunci : Sistem terkontrol, matriks keterkontrolan, jarak $\mu(A, B)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertimbangkan suatu sistem kontrol linier berikut :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1.1.1)$$

dengan $A \in \Re^{n \times n}$, $B \in \Re^{n \times m}$, $x \in \Re^{n}$ dan $u \in \Re^{m}$. Sistem ini sering ditulis sebagai pasangan matriks (A, B).

Pasangan matriks (A, B) dikatakan terkontrol jika ada input $u \in \Re^{m}$ sedemikian sehingga keadaan akhir $x(t_1)$ dapat dicapai dari keadaan awal $x(0)$ dalam waktu t_1 [4].

Jika pasangan matriks (A,B) terkontrol, maka sistem (1.1.1) dikatakan terkontrol. Tentu saja, dalam hal sebaliknya sistem (1.1.1) dikatakan tak terkontrol.

Salah satu kriteria uji untuk menentukan apakah suatu sistem kontrol linier terkontrol atau tidak terkontrol adalah dengan menggunakan rank dari matrik keterkontrolan berikut :

$$C(A,B) = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Jika rank $C(A,B) = n$ maka sistem (1.1.1) terkontrol, dan sebaliknya jika rank $C(A,B) < n$ maka sistem (1.1.1) tak terkontrol.

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh sistem berikut ini dengan matrik-matrik keadaan sebagai berikut ;

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Sistem (1.1.1) dengan matrik keadaan A dan B seperti di atas adalah terkontrol, karena

$$
\text{rank } C(A,B)=3
$$

Tetapi jika terhadap matrik A dan B diberi gangguan (perturbasi) sebesar ΔA dan ΔB sebagai berikut :

$$
\Delta A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \Delta B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

maka sistem

$$
\dot{x}=\left(A+\Delta A\right)x+\left(B+\Delta B\right)u
$$

tidak lagi terkontrol, karena

$$
\text{rank } C(A+\Delta A, B+\Delta B)<3
$$

Sehingga pertanyaan yang muncul adalah apakah bisa ditentukan jarak antara suatu sistem terkontrol dengan sistem tak terkontrol?

Misalkan ξ adalah suatu himpunan,yang didefinisikan sebagai berikut :

$$
\xi=\left\{(E,F) \mid E\in\Re^{n\times n}, F\in\Re^{n\times m}\right\}
$$

dan

$$
\xi^{c}=\left\{(A,B) \mid (A,B)\in\xi \text{ dan } (A,B) \text{ terkontrol}\right\}
$$

Karakteristik umum dari ξ^{c} adalah untuk setiap $(A,B)\in\xi^{c}$ terdapat suatu lingkungan V dari (A,B) sedemikian sehingga untuk setiap $\left(A_1,B_1\right)\in V$ maka $\left(A_1,B_1\right)\in\xi^{c}$ [3].

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa jarak terdekat antara sistem (A, B) dengan sistem yang tak terkontrol adalah

$$\mu(A,B) \leq \min\left(\left(1+\frac{\|A_c\|_2}{\sigma_r}\right)\sigma_{r+1}\right)$$

Jika jarak yang diperoleh kecil, maka sistem terkontrol (A, B) relatif dekat dengan sistem yang tak terkontrol. Sebaliknya, jika jarak yang diperoleh besar maka sistem terkontrol (A, B) relatif jauh dari sistem yang tak terkontrol.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

[1] Anton, H. 2004. *Aljabar Linear Elementer(terjemahan)*. Penerbit Erlangga : Jakarta.

[2] Clotet, J and M.I. Garcia-Planas. 1998. *Bounding The Distance of a Controllable and Observable System to an Uncontrollable or Unobservable One*. Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona. http://hdl.handle.net/2117/1050. 9 Maret 2009.

[3] Clotet, J and M.I. Garcia-Planas. 1999. *Bounding The Distance of a Controllable System to an Uncontrollable One*. Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona. http://hdl.handle.net/2117/1048. 9 Maret 2009.

[4] Datta, B.N. 2004. *Numerical Methods For Linear Control Systems. Design and Analysis*. Elsevier Academic Press : San Diego.

[5] Goldberg, J.L. 1991. *Matrix Theory with Applications*. Mc.Graw-Hill : United States of America.

[6] Leon, J.S. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya, edisi ke-lima*. Penerbit Erlangga : Jakarta.

[7] Mailybaev, A.A. 2003. *Uncontrollability for Linear Autonomous Multi-input Dynamical Systems Depending on Parameters*. SIAM J. Control Optimal. 24 Juni 2009.

[8] Masten, M.K. 1995. *Modern Control Systems*. Published by the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. : United States of America.