SIFAT-SIFAT IDEAL PADA GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH

HARDI SETIAWAN
03 134 005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2009

ABSTRAK

Misalkan R Gelanggang. R disebut gelanggang komutatif jika $\forall a,b \in R$ berlaku $a.b = b.a$. Gelanggang polinomial $R[x]$ adalah gelanggang yang koefisien polinomialnya berada pada gelanggang R. I dikatakan *ideal* dari gelanggang R jika I suatu subgroup dari R dan untuk setiap $i \in I, r \in R$ berlaku $ir, ri \in I$. Pada tulisan ini ditunjukkan bahwa ideal yang berlaku pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan memiliki beberapa sifat tertentu.

Kata kunci : *gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, ideal, gelanggang polinomial.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Himpunan tak kosong G disebut grup jika G bersama suatu operasi biner '*' memenuhi sifat tutup, asosiatif, terdapat unsur identitas di G, dan untuk setiap unsur di G mempunyai invers. Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah grup.

Himpunan tak kosong R dikatakan membentuk *gelanggang* jika di R dapat didefinisikan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian serta memenuhi sifat grup abelian (grup komutatif) terhadap operasi penjumlahan, asosiatif terhadap operasi perkalian dan memenuhi sifat distributif kiri dan kanan terhadap operasi perkalian dan penjumlahan.

R disebut gelanggang komutatif jika $\forall a,b \in R$ berlaku $a.b = b.a$. Suatu gelanggang R yang komutatif, memiliki unsur kesatuan dan invers terhadap perkalian di R disebut dengan *lapangan*.

Misalkan R adalah gelanggang. $R[x]$ disebut gelanggang polinomial jika polinomial $f(x)$ dengan koefisiennya berada di R. Jadi gelanggang polinomial $R[x]$ adalah gelanggang yang koefisien polinomialnya berada pada gelanggang R.

Misalkan R suatu gelanggang, $U \subset R$ dengan $U \neq \phi$. U dikatakan *ideal* dari R jika U suatu subgroup dari R dan untuk setiap $u \in U, r \in R$ berlaku $ur, ru \in U$.

Karena ideal yang berlaku pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan memiliki beberapa sifat, maka dalam tugas akhir ini penulis akan mengkaji **"Sifat-Sifat Ideal pada Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan"**.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah menyelidiki bagaimana sifat-sifat ideal pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penulisan tugas akhir ini penulis hanya membatasi untuk ideal yang berlaku pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, yaitu pada gelanggang polinomial.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan yang ingin dicapai pada tugas akhir ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat ideal pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.5 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dari skripsi ini adalah :

BAB I : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II : Landasan Teori

Pada bab ini akan diuraikan mengenai teori – teori pendukung yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas antara lain grup, gelanggang, gelanggang komutatif, gelanggang polinomial, sifat aljabar pada bilangan riil dan ideal.

BAB III : Pembahasan

Pada bab ini dibahas tentang ideal pada gelanggang serta sifat-sifat ideal pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

BAB IV : Kesimpulan

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa I disebut ideal pada gelanggang R jika memenuhi ketiga sifat berikut, yaitu : $0 \in I$ atau $I \neq \phi$, $a\text{-}b \in I$ $\forall a,b \in I$ dan $ar = ra \in I$, $\forall a \in I$, $\forall r \in R$. Ada beberapa sifat ideal yang berlaku pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, yaitu :

1. Jika R gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan $P \subseteq R$ dengan $P \neq \phi$, maka himpunan $I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \middle| p_i \in P, r_i \in R, n \in \mathrm{N} \right\}$ merupakan ideal pada R.
2. Diketahui R gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan I, J masing-masing merupakan ideal pada R, maka kedua sifat berikut berlaku:
   i. $I \cap J$ merupakan ideal pada R
   ii. $I + J$ merupakan ideal pada R
3. Jika R gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan I ideal pada R, maka himpunan $J = \{a \in R \mid (\exists m \in \mathrm{N}), a^m \in I\}$ merupakan ideal pada R.
4. Misalkan D daerah ideal utama. Jika $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ merupakan rangkaian naik ideal-ideal di D maka terdapat bilangan bulat positif r dan s sehingga $N_r = N_s$ untuk semua $s \geq r$.
5. Misalkan $K[x]$ suatu gelanggang polinomial atas lapangan K dengan karakteristik nol dan $R = CK[x]$. Tulis $R^2 = C^2K[x]$, maka R^2 suatu ideal pada R.

6. Misalkan $K[x]$ suatu gelanggang polinomial atas lapangan K dengan karakteristik nol dan $R = XK[x]$. Tulis $R^2 = X^2K[x]$, $R^3 = X^3K[x]$, maka R, R^2, R^3 suatu ideal pada R dengan $R \supseteq R^2 \supseteq R^3$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abian, A. 1976. *Boolean Ring*. Branden Press, Boston.

[2] Arifin, A. 2000. *Aljabar*. ITB, Bandung.

[3] Arnawa, I.M. 2007. *Gelanggang Deret* Pangkat. Universitas Andalas, Padang.

[4] Bartle, R.G. 1990. *Introduction to Real analysis 2nd edition*. Arico Printers Pte.Ltd, Singapore.

[5] Fraleigh, J.B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison – Wesley Publishing Company, New York.

[6] Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra 2nd edition*. John Wiley & Sons, New York.

[7] Hungerford, T. 1974. *Algebra*. Holt & Rinerhart, New York.

[8] Isaacs, I. M. 1994. *Algebra a Graduate Course*. Brooks/Cole Publishing Company, California.

[9] Isnarto. 2008. *Pengantar Struktur Aljabar 2* .Universitas Negeri Semarang, Semarang.

[10] Wijna. 2008. *Struktur Aljabar - Ideal* .Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta. http : //wijna.web.ugm.ac.id/struktur_aljabar/ideal.html.