FAKTORISASI QR UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH KUADRAT TERKECIL

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh:

ALFIRA
05134034

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2009

ABSTRAK

Tidak semua sistem persamaan linier tak homogen mempunyai penyelesaian, diantaranya adalah sistem kelebihan persamaan. Untuk menyelesaikan sistem kelebihan persamaan ini dapat dilakukan dengan masalah kuadrat terkecil, yang berarti akan dicari suatu vektor $\mathbf{x}$ yang meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ pada hasil kali dalam Euclidis pada R^m. Masalah kuadrat terkecil dapat diselesaikan dengan Faktorisasi QR tanpa harus melihat vektor-vektor kolom dari A membentuk himpunan ortonormal. Pada tulisan ini, akan ditentukan faktorisasi QR dari matriks A dengan metode Gram-Schmidt dalam penyelesaian kuadrat terkecil.

Kata Kunci : vektor, *hasil kali dalam,masalah kuadrat terkecil, faktorisasi QR, himpunan ortonormal, metode Gram-Schmidt.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan linier dalam n variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dapat ditulis dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ dengan $a_1, a_2, ..., a_n$ dan b konstanta-konstanta riil. Sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dinamakan Sistem Persamaan Linier (SPL). Dalam bentuk matriks, ditulis sebagai $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tidak semua SPL takhomogen mempunyai penyelesaian. Sebuah SPL yang tidak mempunyai penyelesaian dikatakan takkonsisten.

Dalam SPL dikenal juga adanya sistem kekurangan persamaan dan kelebihan persamaan. Sistem kekurangan persamaan, yaitu banyak persamaan lebih sedikit dari pada banyak variabel. Sistem kelebihan persamaan, yaitu jika banyak variabel lebih sedikit dari pada banyak persamaan. Sistem kelebihan persamaan ini biasanya takkonsisten. Untuk menyelesaikan sistem kelebihan persamaan ini dapat dilakukan dengan masalah kuadrat terkecil.

Masalah kuadrat terkecil adalah mencari suatu vektor $\mathbf{x}$ yang meminimumkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ dengan A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$ untuk $m \geq n$. Masalah kuadrat terkecil mudah diselesaikan dalam kasus bila vektor-vektor kolom dari A membentuk sebuah himpunan ortonormal. Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$ yang vektor-vektor kolomnya membentuk himpunan ortonormal, maka penyelesaian kuadarat terkecil dari $A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$. Jika rank $(A) = n$, tapi vektor-vektor kolomnya tidak membentuk himpunan ortonormal, maka diubah matriks A menjadi matriks Q dan R yang biasa disebut faktorisasi QR untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil.

Faktorisasi QR dapat dilakukan dengan menggunakan metode Gram-Schmidt, matriks Q dan R dapat dibentuk dengan Q adalah matriks $m \times n$ yang kolom-kolomnya ortonormal dan R matriks $n \times n$ yang merupakan matriks segitiga atas.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka yang dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana melakukan faktorisasi QR terhadap matriks A dari SPL $\mathbf{Ax} = \mathrm{b}$ dalam menyelesaikan masalah kuadrat terkecil.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penulisan ini akan dibatasi pada matriks $m \times n$ untuk $m > n$ dengan faktorisasi QR terhadap matriks A dengan menggunakan metode Gram-Schmidt.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan adalah menyelesaikan masalah kuadarat terkecil dengan faktorisasi QR terhadap matriks A dengan menggunakan metode Gram-Schmidt.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada Bab III dapat disimpulkan bahwa, faktorisasi QR dengan menggunakan metode Gram-schmidt dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yaitu jika kolom-kolom dari sebuah matriks A yang berukuran $m \times n$ membentuk sebuah himpunan ortonormal atau jika rank (A) = n tapi vektor-vektor kolomnya tidak membentuk himpunan ortonormal di dalam R^m dapat dilakukan dengan cara:

1. Mencari matriks Q yang membentuk basis ortonormal untuk ruang kolom A dengan metode Gram-Semidt.
2. Membentuk matriks R segitiga atas dengan syarat mengisi entrinya sebagai berikut:

$$r_{ij} = \begin{cases} < q_i, a_j > & , i < j \\ \left\| a_j - < q_1, a_j > q_1 - < q_2, a_j > q_2 - \ldots\ldots - < q_{j-1}, a_j > q_{j-1} \right\| & , i = j \\ 0 & , i > j \end{cases}$$

3. Menggunakan substitusi balik untuk menyelesaikan $R\,\mathbf{x} = Q^T\,\mathbf{b}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linier Elementer Edisi ke-5.* Erlangga. Jakarta.

[2] Anton, Howard dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1.* Erlangga, Jakarta.

[3] Goldberg, Jack. L. 1991. *Matrix Theory With Applications.* New York.

[4] Jacob, B. 1990. *Linier Algebra.* W.H. Freeman and Company, New York.

[5] Leon, Steven. J. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya Edisi ke-5.* Erlangga, Jakarta.

[6] Meyer, Carl. D. *Matrix Analysis and Applied Linier Agebra.* Siam.