TEOREMA PERRON-FROBENIUS

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

RENI FARIDA
04134039

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS PADANG

PADANG

2008

ABSTRAK

Dalam sripsi ini, Teorema Perron-Frobenius yang berlaku untuk matriks nonnegatif dan tidak tereduksi akan dipelajari dan dibuktikan kembali. Beberapa contoh yang menjelaskan validitas Teorema Perron-Frobenius disajikan.

Kata kunci : *Teorema Perron, matriks positif, matriks nonnegatif, teorema Perron-Frobenius dan matriks tidak tereduksi*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \Re^{n \times n}$ dikatakan matriks positif, jika $a_{ij} > 0$ untuk setiap $i, j = 1, 2, ..., n$ dan dinotasikan dengan $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Selanjutnya $\mathbf{A}$ dikatakan matriks nonnegatif, jika $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap $i, j = 1, 2, ..., n$ dan dinotasikan dengan $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ [3]. Dalam hal ini $\Re^{n \times n}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berordo $n \times n$.

Ada beberapa sifat matriks positif yang menarik untuk diperhatikan, yaitu untuk setiap $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ dengan $r = \rho(\mathbf{A})$, $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|$ dan $\sigma(\mathbf{A})$ merupakan himpunan nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$, berlaku:

1. $r > 0$
2. $r \in \sigma(\mathbf{A})$
3. $alg\ mult_{\mathbf{A}}(r) = 1$
4. Ada suatu vektor eigen $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ sedemikian hingga $\mathbf{A}\mathbf{x} = r\mathbf{x}$
5. Vektor tunggal didefinisikan dengan

   $$\mathbf{A}\mathbf{p} = r\mathbf{p}\,,\ \mathbf{p} > \mathbf{0} \text{ dan } \|\mathbf{p}\|_1 = 1$$

   dikatakan vektor Perron. Tidak terdapat vektor eigen yang nonnegatif untuk A kecuali untuk kelipatan positif dari p..
6. r adalah satu-satunya nilai eigen pada lingkaran spektral dari $\mathbf{A}$.

7. $r = \max_{x>0}(r_x)$ dengan $r_x = \min_{1\le i\le n}\left\{\frac{\sum_{j=1} a_{i,j}x_j}{x_i}\right\}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ merupakan vektor eigen.

Sifat 1-7 dikenal sebagai Teorema Perron yang berlaku untuk matriks positif [6]. Dalam sifat 1, r sering disebut sebagai akar Perron dari $\mathbf{A}$ dan vektor p dalam sifat 3 disebut sebagai vektor Perron dengan $p \in N(\rho(\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Bagaimana halnya dengan matriks nonnegatif? Apakah sifat 1-7 dari Teorema Perron juga masih berlaku? Untuk matriks nonnegatif sebenarnya teorema ini telah dipelajari oleh Ferdinand Georg Frobenius. dan hasilnya dikenal dengan nama Teorema Perron-Frobenius. Dalam tugas akhir ini, Teorema Perron-Frobenius akan dipelajari kembali.

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan matriks $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$. Apakah Teorema Perron masih berlaku untuk setiap $\mathbf{A} \ge \mathbf{0}$?

1.3 Pembatasan Masalah

Masalah dalam penulisan ini dibatasi untuk $\mathbf{A} \ge \mathbf{0}$ dan tidak tereduksi.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui perbedaan antara Teorema Perron dengan Teorema Perron-Frobenius.

1.5 Sistematika Penulisan

Penelitian ini ditulis dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini berisikan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori-teori yang berhubungan dengan masalah yang dibahas.

BAB III : HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang hasil pengolahan dan pembahasan dari permasalahan.

BAB IV : PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan berdasarkan hasil pembahasan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Teorema Perron-Frobenius merupakan pengembangan dari Teorema Perron. Teorema Perron berlaku untuk matriks positif dengan syarat yaitu $r = \rho(\mathbf{A})$ dan Teorema Perron-Frobenius berlaku untuk matriks nonnegatif dan tidak tereduksi. Tetapi, tidak semua sifat dari Teorema Perron berlaku untuk teorema Perron-Frobenius. Teorema Perron-Frobenius tidak menjamin bahwa untuk matriks nonnegatif dan tidak tereduksi, r merupakan satu-satunya nilai eigen pada lingkaran spektral dari matriks tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga. Jakarta

[2] Bartle, R.G and Donald, R.S. 1994. *Introduction to Real Analysis Second Edition*. Singapore

[3] Gantmacher, F. R. 2000. *The Theory of Matrices, Volume One*. AMS Chelsea Publihing. Providence Rhode Island

[4] Horn, A. R and Johnson R.C. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University. Cambridge

[5] Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. Erlangga. Jakarta

[6] Meyer, Carl D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Siam.