

**TEORI MODUL BEBAS  
DAN KARAKTERISTIK BASIS PADA MODUL**

**SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA**

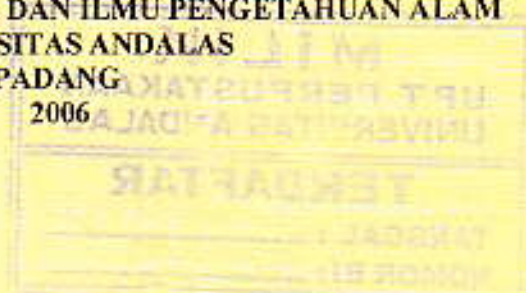
Oleh

**SRI RAHAYU  
01134039**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS ANDALAS  
PADANG**

**2006**



## ABSTRAK

Konsep basis pada ruang vektor dan modul pada dasarnya sama, namun terdapat perbedaan, karena sifat ruang vektor lebih lengkap dibanding modul. Setiap ruang vektor mempunyai basis namun tidak demikian halnya dengan modul. Modul yang mempunyai basis disebut modul bebas. Pada tulisan ini akan dibahas himpunan-himpunan yang akan menjadi basis pada modul atas gelanggang pembagi. Himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bebas linier, bebas linier maksimal dan pembangun minimal. Selanjutnya akan dibuktikan jika modul dibangun secara hingga maka jumlah elemen semua basis tersebut adalah sama, khususnya modul atas gelanggang komutatif.

**Kata kunci :** *modul, basis, modul bebas*

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Modul adalah generalisasi dari ruang vektor, yaitu dengan menggeneralisasikan lapangan pada ruang vektor menjadi gelanggang dengan elemen satuan. Konsep basis yang ada pada ruang vektor juga sama dengan modul. Misalkan  $V$  ruang vektor tak nol atas lapangan  $F$  dan  $M$  modul tak nol atas gelanggang komutatif dengan identitas  $R$ , dan  $S$  himpunan bagian dari  $V$  atau himpunan bagian dari  $M$ . Maka  $S$  adalah basis ruang vektor  $V$  atau basis modul  $M$ , jika  $S$  himpunan yang bebas linier dan membangun  $V$  atau  $M$ .

Walaupun secara definisi sama tetapi banyak perbedaan pengertian dari kedua basis. Basis di ruang vektor lebih lengkap dari pada modul, sehingga ada sifat yang dimiliki ruang vektor tetapi tidak dimiliki oleh modul. Pada akhirnya dapat disimpulkan bahwa ruang vektor selalu memiliki basis, namun tidak demikian halnya dengan modul.

Maka berdasarkan kepemilikan basis, modul dapat dibagi dua, yaitu modul yang mempunyai basis dan modul yang tidak mempunyai basis. Modul yang mempunyai basis disebut *free modul* atau modul bebas. Hal ini yang mendasari penulis untuk mempelajari tentang teori modul bebas dan karakteristik basis pada modul.

### 1.2 Perumusan Masalah

Tidak semua modul mempunyai basis. Modul yang mempunyai basis disebut modul bebas. Diberikan himpunan bebas linier, bebas linier maksimal, pembangun minimal pada modul atas gelanggang pembagi. Akan dibuktikan

bahwa himpunan-himpunan ini akan menjadi basis pada modul atas gelanggang pembagi. Selanjutnya akan dibuktikan jika modul dibangun secara hingga maka jumlah elemen semua basis tersebut adalah sama, khususnya modul atas gelanggang komutatif.

### **1.3 Batasan Masalah**

Pada tulisan ini akan dipelajari tentang karakteristik basis pada modul dan modul yang mempunyai basis. Pembahasan dibatasi oleh himpunan bebas linier, bebas linier maksimal, pembangun minimal pada modul atas gelanggang pembagi, dan elemen basis pada gelanggang komutatif

### **1.4 Tujuan**

Tujuan penulisan ini adalah mempelajari bahwa himpunan bebas linier, bebas linier maksimal, pembangun minimal pada modul atas gelanggang pembagi akan menjadi basis, serta jumlah elemen basis pada modul yang dibangun secara hingga adalah sama, khususnya modul atas gelanggang komutatif.

### **1.5 Sistematika Penulisan**

Pada bab I diterangkan latar belakang penulisan, tujuan, perumusan masalah, batasan masalah dan sistematika penulisan. Pada bab II berisi landasan teori yang mendasari bagian pembahasan yaitu teori himpunan, teori gelanggang, teori ruang vektor, teori modul dan basis yang berupa definisi, teorema-teorema dan contoh. Pada bab III merupakan inti dari permasalahan yaitu membahas himpunan bebas linier, bebas linier maksimal, pembangun minimal pada modul atas gelanggang pembagi akan menjadi basis, dan jumlah elemen basis pada modul yang dibangun secara hingga adalah sama, khususnya modul atas gelanggang komutatif. Bab IV berisi kesimpulan.

## BAB IV KESIMPULAN

Ruang vektor selalu mempunyai basis, namun tidak demikian halnya dengan modul. Modul yang mempunyai basis disebut modul bebas. Modul atas gelanggang pembagi memiliki himpunan bebas linier, bebas linier maksimal dan pembangun minimal yang ternyata dapat menjadi basis, maka modul atas gelanggang pembagi adalah modul bebas. Dan modul bebas dengan  $n$  jumlah basis, akan memiliki jumlah elemen basis yang sama, khususnya pada gelanggang komutatif.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adkins, W.A. and Weintraub, S.H. 1992. *Algebra Approach via Module Theory*. Springer – Verlag, New York
- [2] Bhattacharya, P.B, Jain, S.K. 1977. *First Course in Ring, Field and Vector Space*. Wiley Eastern Limited, New Delhi
- [3] Fraleigh, J. B , 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison – Wesley Publishing Company, New York
- [4] Heirstein, I. N . 1997. *Topics in Algebra*. Jhon Wiley & Sons, New York
- [5] Hungerford, T,W. 1974. *Algebra*. Springer Verlag, New York
- [6] Jacob, Bill . 1990. *Linear Algebra*, W. H Freeman and Company, New York
- [7] Musili, C. 1992. *Introduction to Rings and Modules*. Toppan Company (S) Pte Ltd, Singapore