FUNGSI WEIERSTRASS SEBAGAI FUNGSI KONTINU PADA GARIS RIIL $\Re$ TETAPI TIDAK TERDIFERENSIAL DIMANAPUN PADA GARIS RIIL $\Re$

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

Corry Corazon Marzuki
03 134 031

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS ANDALAS
UPT PERPUSTAKAAN

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2007

ABSTRAK

Suatu fungsi yang kontinu pada suatu titik belum tentu terdiferensial di titik tersebut karena kekontinuan suatu fungsi pada suatu titik hanya merupakan syarat perlu (bukan syarat cukup) untuk eksistensi turunan pada titik itu. Pada tugas akhir ini dibahas dan dibuktikan eksistensi fungsi yang kontinu pada garis riil $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada garis riil $\Re$ dengan membuktikan adanya fungsi Weierstrass yang bersifat demikian.

Kata kunci : *fungsi kontinu, fungsi terdiferensial, fungsi Weierstrass.*

BAB I

PENDAHULUAN

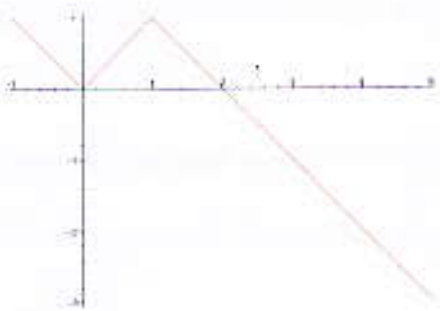
1.1 Latar Belakang

Suatu fungsi $f : A \to \Re$, $A \subseteq \Re$ dikatakan kontinu di $c \in A$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga jika $x \in A \cap V_\delta(c)$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$ [2]. Contohnya : $f(x) = |x|$. Sedangkan suatu fungsi $f : I \to \Re$, $I \subseteq \Re$ dikatakan terdiferensial di titik $c \in I$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $\forall x \in I$ dengan $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, maka $\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \varepsilon$ [2]. Contohnya : $f(x) = x$.

Kekontinuan suatu fungsi f pada suatu titik c adalah syarat perlu (bukan syarat cukup) untuk eksistensi turunan f pada titik c [2]. Suatu fungsi yang terdiferensial pastilah kontinu, namun kekontinuan fungsi pada suatu titik tidak menjamin adanya turunan fungsi pada titik itu. Jadi, terdapat suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial di suatu titik pada $\Re$.

1. Fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial di dua titik pada $\Re$.

Contoh : $f(x) = \begin{cases} |x| & ; untuk\ x < 1 \\ -x + 2 & ; untuk\ x \geq 1 \end{cases}$



2. Fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial di n titik pada $\Re$.

Contoh :

a. Untuk n bilangan ganjil

$$f(x)=\begin{cases}|x| & ;\ untuk\ x<1\\ |x-2| & ;\ untuk\ 1\le x<3\\ |x-4| & ;\ untuk\ 3\le x<5\\ \vdots & \\ |x-n+1| & ;\ untuk\ x\ge n-2\end{cases}$$

b. Untuk n bilangan genap

$$f(x)=\begin{cases}|x| & ;\ untuk\ x<1\\ |x-2| & ;\ untuk\ 1\le x<3\\ |x-4| & ;\ untuk\ 3\le x<5\\ \vdots & \\ -x+n & ;\ untuk\ x\ge n-1\end{cases}$$

Jadi, ada fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial di beberapa titik pada $\Re$. Namun adakah suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$?

Pada tahun 1872, Karl Weierstrass telah mengejutkan dunia matematika karena ia berhasil menemukan contoh suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak mempunyai turunan dimanapun pada $\Re$ [2]. Penemuan ini telah menyangkal sekaligus menggugurkan pendapat para ahli matematika yang sebelumnya meragukan adanya fungsi kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$ [4].

Weierstrass berhasil mengkonstruksi suatu fungsi yang disajikan sebagai deret tak berhingga dari fungsi-fungsi terdefinisi dan kontinu pada $\Re$ yang

didefinisikan : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$, untuk $x \in \Re$ dengan $0 < a < 1$, b bilangan ganjil dan $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Fungsi ini dikenal dengan Fungsi Weierstrass. Fungsi ini merupakan penemuan yang sangat fenomenal pada zamannya dan monumental karena penemuan ini terjadi pada masa peralihan dari analisis klasik ke analisis modern [4].

Hal inilah yang mendasari penulis untuk membahas mengenai fungsi Weierstrass yang merupakan fungsi kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$.

1.2 Permasalahan

Adapun permasalahan yang dibahas pada skripsi ini adalah pembuktian fungsi Weierstrass sebagai fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$.

1.3 Pembatasan Masalah

Pembuktian fungsi Weierstrass sebagai fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$ pada skripsi ini dibatasi untuk $0 < a < 1$, b bilangan ganjil dan $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari pembahasan ini adalah untuk membuktikan eksistensi suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Sudah berabad-abad, para matematikawan meyakini bahwa setiap fungsi yang terdefinisi dan kontinu pada selang subhimpunan $\Re$ pasti terdapat minimal satu titik dalam selang itu dimana fungsi terdiferensial. Namun keyakinan ini dapat digugurkan dengan ditemukannya fungsi Weierstrass yang didefinisikan dengan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$, untuk $x \in \Re$ dengan $0 < a < 1$, b bilangan ganjil dan $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Fungsi yang ditemukan oleh Karl Weierstrass ini terbukti sebagai fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$. Dengan adanya fungsi Weierstrass ini, terbuktilah eksistensi suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tetapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$.

4.2 Saran

Pada tulisan ini, penulis membuktikan eksistensi suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$ dengan menunjukkan adanya fungsi Weierstrass yang dibatasi untuk $0 < a < 1$, b bilangan ganjil dan $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Pada tahun 1961, batasan tersebut telah disederhanakan oleh Hardy menjadi $0 < a < 1$ dan $ab \geq 1$. Jadi disarankan kepada penulis selanjutnya untuk

membuktikan eksistensi suatu fungsi yang kontinu pada $\Re$ tapi tidak terdiferensial dimanapun pada $\Re$ dengan menggunakan batasan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Apostol, T. M. 1974. *Mathematical Analysis. Second Edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Philippines

[2] Bartle, R.G. and Sherbert, D.C. 1994. *Introduction to Real Analysis, Second Edition.* Jhon Wiley and Sons, New York

[3] Bartle, R.G. 1976. *The Element of Real Analysis, Second Edition.* Jhon Wiley and Sons, New York

[4] Samparadja, H. 1997. Fungsi Weierstrass Fungsi Kontinu pada $\Re$ tetapi tidak Terdiferensial dimanapun pada $\Re$. *Bersama Majalah Ilmiah Himpas-Sultra.*7(4):391-395